

# 圆柱绕流研究现状综述

王吉<sup>1</sup>, 周甜<sup>1</sup>, 何敬<sup>1</sup>, 郭文宾<sup>1,2\*</sup>, 左志涛<sup>1,2</sup>, 徐玉杰<sup>1,2</sup>

(1. 毕节高新技术产业开发区国家能源大规模物理储能技术研发中心, 贵州毕节 551700; 2. 中国科学院工程热物理研究所, 北京 110190)

**摘要:** [目的]为了系统掌握圆柱绕流的特性和作用机理, 对其研究进展情况进行梳理。[方法]根据绕流柱体的数量特征, 从单圆柱、双圆柱和多圆柱 3 种类别出发, 对前人在圆柱绕流方面取得的研究成果进行归纳。在此基础上, 系统地分析圆柱绕流的尾流演化规律和圆柱体的受力特性, 深入剖析多圆柱绕流中剪切层、尾流、涡流和卡门涡街之间复杂的相互作用机理。[结果]通过该研究综述, 明确不同柱体布置下绕流流动的基本特征与主导机理, 揭示尾流结构演化、涡脱落模式及柱间干扰效应对流动特性与受力的影响规律。[结论]研究成果可供未来相关领域的圆柱绕流分析参考。

**关键词:** 圆柱绕流; 尾流特性; 多柱干扰; 现状综述

**中图分类号:** O368 **文献标志码:** A **【DOI】** 10.13788/j.cnki.cbgc.2026.05.01

## Review of the Current Research Situation on the Flow Around a Cylinder

WANG Ji<sup>1</sup>, ZHOU Tian<sup>1</sup>, HE Jing<sup>1</sup>, GUO Wenbin<sup>1,2\*</sup>,  
ZUO Zhitao<sup>1,2</sup>, XU Yujie<sup>1,2</sup>

(1. National Energy Large Scale Physical Energy Storage Technologies R&D Center of Bijie High-Tech Industrial Development Zone, Bijie 551700, Guizhou, China; 2. The Institute of Engineering Thermophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 110190, China)

**Abstract:** [Purpose] The current state of research is reviewed in the field of flow around cylinders to systematically understand its characteristics and mechanisms. [Method] Previous research is categorised into three types based on the number of cylinders in the flow configuration: single-cylinder, double-cylinder and multi-cylinder. It then summarises the findings of prior studies on flow around cylinders. Building on this, we analyse the evolution patterns of the wake and the force characteristics of cylinders in flow around cylinders. An in-depth analysis is also conducted of the complex interaction mechanisms between the shear layer, wake, vortices and Karman vortices in flow around multiple cylinders. [Result] The basic characteristics and dominant mechanisms are clarified of flow around columns under different arrangements, and reveals the influence of wake structure evolution, vortex shedding patterns and inter-column interference effects on flow characteristics and forces. [Conclusion] The research findings can serve as a reference for future analyses of flow around columns in related fields.

**Key words:** flow around cylinder; wake characteristic; multi-cylinder interference; review of current status

收稿日期: 2025-09-22; 修回日期: 2025-12-05

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(52306285); 贵州省科研机构创新能力建设(黔科合服企(2024)017); 贵州省科技计划项目(黔科合基础-ZK(2023)001); 毕节市科技计划项目(毕科合(2023)1号); 毕节市科技计划项目(毕科合(2025)51号)。

作者简介: 王吉(1987—), 男, 硕士、实验师。研究方向: 流体机械。

通信作者: 郭文宾(1992—), 博士。研究方向: 叶轮机械气动热力学。E-mail: guowenbin@iet.cn。

## 0 引言

圆柱绕流是流体力学领域的经典问题之一，在实际工程中较为常见。如，海洋管道、烟囱、桥墩、天线、管壳式换热器、撑杆、桅杆、海上支柱和核电站冷却系统等结构周围会产生复杂的流场（如卡门涡街），这些流场会引发结构振动和声学噪声等问题（甚至是共振），从而导致结构遭到破坏。1965年，英国布里奇发电站发生的冷却塔倒塌事故就是圆柱绕流中的涡激振动引发的<sup>[1]</sup>。因此，对圆柱绕流进行研究具有重要意义。

受技术限制，早期对圆柱绕流的研究比较简单，以模型试验为主。近年来，随着科技的不断进步，以及计算机技术的不断发展，对圆柱绕流的研究取得了很大进展。目前圆柱绕流研究方法主要有借助流体力学理论加以分析、数值模拟和试验研究3种<sup>[2]</sup>，其中：数值模拟和试验研究2种方法的应用较多；理论分析方法因在利用边界层理论揭示圆柱绕流机理方面仍面临巨大挑战，相关研究成果较少。

根据研究对象的不同，圆柱绕流可分为单圆柱绕流、双圆柱绕流和多圆柱绕流3种。本文主要从单圆柱、双圆柱和多圆柱3个方面总结前人在圆柱绕流方面取得的研究成果，分析圆柱绕流的尾流特性和圆柱的受力特性，以及多圆柱间流场涉及的剪切层、尾流、涡流和卡门涡街之间复杂的相互作用机理。在此基础上，对未来的研究方向进行讨论，为将来相关研究的开展提供参考。

## 1 单圆柱绕流研究现状

### 1.1 基本理论

受试验基础设施和计算机技术条件限制，加上单圆柱绕流结构较为简单，早期关于圆柱绕流的研究主要集中在单圆柱绕流上。在建筑工程中，高层建筑、烟囱、冷却塔、拱桥的吊杆和斜拉桥的拉索和桥墩的设计均受单圆柱绕流的影响；在海洋工程中，钻杆、海上风机、水下输油管道以及斜向波浪和洋流作用下的圆形构件布置均须考虑单圆柱绕流影响。此外，斜风作用下的输电导线、安装有隔板的热交换器中的圆管，以及大倾角飞行的火箭和飞行的导弹等，都受单圆柱绕流的影响。

当流体流过静止的物体，或物体在流体中运动时，物体附近会形成多个不同的绕流区域，其范围受诸多因素的影响，包括结构的形状、方位和尺寸，流体自身的流速和黏性，以及各种微小的参数扰动等<sup>[3]</sup>。图1为绕流区域划分<sup>[3]</sup>，其中：(i)为窄的减速流区域；(ii)为两侧附在结构表面的边界层区域；(iii)为两侧的剪切和加速流区域；(iv)为较宽的被称作尾流的下游分离流区域。

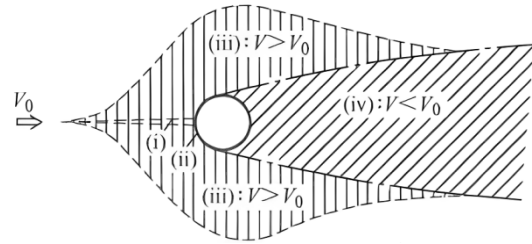


图1 绕流区域划分

Fig. 1 Classification of Flow Regions

1768年，D'ALEMBERT提出了D'ALEMBERT<sup>[4]</sup>疑题，即绕物体流动阻力等于零的疑题，亦即著名的“达朗贝尔佯谬”。达朗贝尔证明，在不可压缩和无黏性流体的流动中，当固体以恒定速度相对于流体运动时，其所受合力为零。“零阻力”的假设与实际观测结果直接矛盾，因为物体在流体（如空气和水）中高速移动时，特别是在高雷诺数条件下，会受到实质阻力的作用。英国的MALLOCK<sup>[5-6]</sup>和法国的BENARD<sup>[7]</sup>通过观察发现，当流体绕钝体流动时，钝体后部区域会出现交错排列的旋涡。

1904年，德国物理学家普朗特<sup>[8]</sup>提出了著名的“边界层理论”，其利用边界层理论很好地解决了D'ALEMBERT疑题。普朗特指出，在高雷诺数条件下，当流体绕钝体流动时，在距离固体壁面较远处，由于惯性力比黏性力大很多，黏性力产生的影响可忽略不计。但在靠近固体壁面的薄层中，黏性力的影响不可忽视。同时，沿该薄层法线方向存在显著的速度梯度，该薄层就被称作边界层<sup>[9]</sup>。

1908年，BENARD<sup>[10]</sup>为观察圆柱绕流尾流中涡的周期性脱落现象，将圆柱体浸于水中开展试验研究，结果发现柱体后面的尾流中出现2列交替的旋涡，二者的间距保持不变，且该间距仅与物体自身的尺寸有关。

1912年，VON KARMAN<sup>[11]</sup>针对圆柱尾流涡街的形成情况及其在稳定性方面存在的问题开展了较为细致的研究，运用理想流体势流理论成功地确定了尾流阻力与涡动量之间存在着一定的关系。此外，该研究明确指出，上游的来流速度比下游涡街的传播速度快很多。涡街的排列方式并非只有1种可能性，而是存在多种多样的排列情况。当雷诺数 $Re \geq 70$ 时，圆柱后缘上下两侧会出现涡并呈现出周期性轮流脱落状态，进而在圆柱后面形成有规则性、交替排列的涡列，即卡门涡街。

20世纪后期，苏联学者ИДЕЛЬЧИК<sup>[12]</sup>在均匀来流条件下对光滑圆柱体进行了相关试验，得到了光滑圆柱体的阻力系数 $C_X$ 随雷诺数 $Re$ 的变化曲线图，见图2<sup>[12]</sup>。

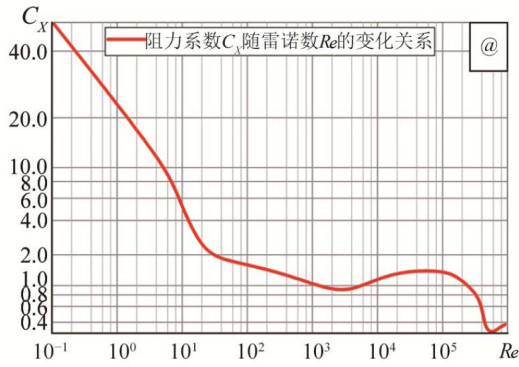


图2 阻力系数  $C_X$  随雷诺数  $Re$  的变化曲线

Fig. 2 Curve of Drag Coefficient  $C_X$  Varying with Reynolds Number  $Re$

由图2可知, 当雷诺数较小时, 阻力系数与雷诺数成反比关系, 在此情况下, 边界层流动的流体为层流, 其绕流阻力仅有摩擦阻力这1种, 且没有旋涡产生。随雷诺数的逐步增大, 压强阻力开始产生并逐渐增大, 此时的绕流阻力包含摩擦阻力和压强阻力<sup>[12]</sup>。当雷诺数  $Re$  增大至  $10^4$  时, 压强阻力占据主导地位, 摩擦阻力相比压强阻力小很多, 故此时绕流

阻力基本上与雷诺数  $Re$  没有关联。当雷诺数  $Re$  进一步增至  $3 \times 10^5$  时, 阻力系数  $C_X$  出现骤然减小的情况, 这是由于圆柱表面原本的层流边界层开始逐步转变为紊流边界层, 进而使动能有所增大<sup>[13]</sup>。该结论对于单圆柱绕流的阻力系数研究而言具有重要意义。

圆柱绕流属于典型的非线性力学问题, 有关该问题的理论分析必须在某种假定的理想条件下进行。目前有关圆柱绕流的理论研究较少, 尚不具备研究能力, 主要研究方式是试验和数值模拟。

### 1.2 圆柱绕流的控制和影响参数

对于理想非扰动流条件下的二维圆柱扰流问题, 其控制参数主要是雷诺数, 但流体中的圆柱通常受多种扰动的影响, 这些扰动可通过一系列影响参数来量化。在一些转捩状态下, 这些影响参数超过某一限值后会成为控制参数。在圆柱绕流中, 这种特性目前还没得到很好的解释。现实情况中常遇到的影响参数是一些不规则的稳定或周期性干扰, 常见干扰类型包括湍流、表面粗糙度、壁面阻塞、近壁面效应、长细比、自由端效应、横向振动和顺流向振动, 见图3<sup>[3]</sup>。

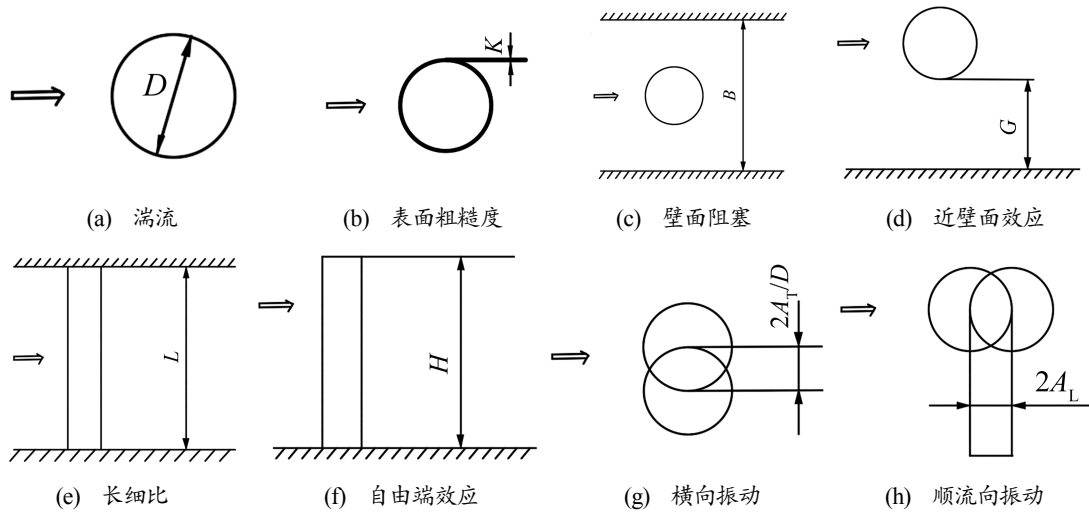


图3 典型扰动类型

Fig. 3 Typical Disturbance Types

在实际应用中, 最常见的干扰是来流的湍流, 见图3(a)。一个三维的随机脉动风速可用湍流强度  $T_i$ 、湍流积分尺度  $T_s$  和频率谱  $F_s$  来描述。直到20世纪30年代才开始测试湍流参数, 20世纪60年代才开始研究湍流强度。在扰动区域的各种转捩也都受来流湍流的影响。

另一个重要的不规则干扰是结构表面粗糙度见图3(b)。表面粗糙度的影响参数至少可归结为2个, 分别是相对粗糙程度  $K/D$  (其中:  $K$  为表面凸起的平均高度;  $D$  为圆柱的直径) 和材质结构。目前, 已有研究大多针对的是光滑圆柱, 没有考虑这2个影响

参数。

壁面阻塞是多数试验中都会出现的稳定干扰, 这种现象在实际应用中并不会出现。风洞或水洞的壁面会严重限制侧向的扰流, 从而在侧向形成附加的压力梯度, 即形成阻塞效应。该现象通常用阻塞比  $D/B$  (其中:  $B$  为测试段宽度) 来描述, 见图3(c)。当阻塞比较大时, 非对称的阻塞会引起一侧出现边界层, 见图3(d)。对于较小的距离与直径比,  $G/D$  (其中:  $G$  为圆柱下沿至壁面的垂直距离, 即间隙高度) 可能会成为控制参数。

端部效应是一个不太明显的干扰因素, 目前有

关该因素的研究较少。在大多数试验研究中，圆柱的两端都浸没在由侧壁形成的边界层中（见图3(e)），由此产生的相互作用会影响圆柱体轴向方向的流动。长细比 $L/D$ （其中： $L$ 为圆柱的长度）是“准”二维圆柱模拟中常见的影响参数，对于图3(f)所示包含自由端的有限长度圆柱而言，长细比成为控制参数。

横流向或顺流向的振动影响很大，振幅超过某个临界值的振动造成的影响远大于其他干扰造成的影响，见图3(f)和图3(g)。在某个确定的流速范围内，自由振动和强迫振动的振幅和频率是影响流动的控制参数。

### 1.3 试验研究现状

#### 1.3.1 早期试验研究阶段

早期人们主要采用物理模型和原型观测的方法对单圆柱绕流尾流形态进行研究。受客观技术条件限制，为便于研究，早期研究人员通常将圆柱体处理为无限长圆柱。1933年，THOM<sup>[14]</sup>在低雷诺数条件下对无限长单圆柱的压力分布和阻力特性进行了研究，并与其他学者测得的压差阻力和摩擦阻力数据进行了对比，为后续研究奠定了基础。1956年，日本学者TANEDA<sup>[15]</sup>在低雷诺数条件下对无限长单圆柱尾流进行了试验研究，结果表明，当雷诺数满足 $5 < Re < 45$ 时，单圆柱后的双涡随着雷诺数的增大而稳定扩展，同时可观察到卡门涡街形成的整个过程，该研究为后续低雷诺数条件下的圆柱绕流研究奠定了基础。

早期在对有限长圆柱进行研究时，主要考虑端部效应和流动结构的变化。1954年，ROSHKO<sup>[16]</sup>通过风洞试验对有限长圆柱绕流尾流的流动状态进行了研究，结果发现，随着雷诺数不断增大，圆柱尾流会历经3个不同的发展时期，分别是层流阶段、转捩阶段和湍流阶段。圆柱尾流各发展阶段与雷诺数的关系见表1。

表1 圆柱尾流各发展阶段与雷诺数的关系

Tab. 1 Relationship Between Different Development Stages and Reynolds Number

雷诺数取值范围	发展阶段
$40 < Re \leq 150$	此阶段为层流阶段，圆柱尾流为稳定的涡街
$150 < Re \leq 300$	此阶段为转捩阶段，尾流中涡街开始出现不规则现象
$300 < Re < 10\ 000$	此阶段为湍流阶段

1968年，ACHENBACH<sup>[17]</sup>在 $6 \times 10^4 < Re < 5 \times 10^6$ 条件下对有限长圆柱绕流进行了研究，讨论了长细比 $L/D$ 对圆柱尾流的影响，同时定义了圆柱尾流流动的3种状态，即亚临界流动（边界层分离）、临界流

动（产生分离泡，随后发生湍流的重新附着）和超临界流动（发生层流到湍流的过渡）。随后，FALTINSEN<sup>[18]</sup>系统地研究了有限长圆柱绕流，并进一步分析了表面光滑圆柱绕流的流动状态与雷诺数的关系，见表2。

表2 光滑圆柱绕流的流动状态与雷诺数的关系

Tab. 2 Relationship Between Flow State of a Smooth Cylinder in Flow and Reynolds Number

光滑圆柱绕流流动状态	雷诺数取值范围（约数）
亚临界状态	$Re \leq 2 \times 10^5$
临界状态	$2 \times 10^5 < Re \leq 5 \times 10^5$
超临界状态	$5 \times 10^5 < Re \leq 3 \times 10^6$
跨临界状态	$Re > 3 \times 10^6$

20世纪90年代，MADELEINE<sup>[19]</sup>系统地综述了有限长单圆柱绕流的三维特性，并对以往有关单圆柱绕流的可视化试验研究进行了总结，结果发现，随着雷诺数的变化，单圆柱后尾流的流动状态发生变化，即雷诺数与单圆柱尾流流动状态之间存在一定的关系。特别是当流动为不可压缩流动时，表面光滑的二维圆柱的尾迹状态是由雷诺数决定的。此外，该研究详细地分析了不同尾流状态与雷诺数的对应关系，见表3。

表3 不同尾流状态与雷诺数的对应关系

Tab. 3 Corresponding Relationship Between Different Wake States and Reynolds Number

雷诺数的取值范围	尾流形态
$Re \leq 0.1$	前后对称流动
$0.1 < Re \leq 4.5$	前后不对称流动，不发生分离
$4.5 < Re \leq 35.0$	流动发生分离，在圆柱下游存在附着的回流泡，该回流泡由2个对称不变的漩涡组成
$35 < Re \leq 60$	流动开始出现不稳定，附着的回流泡开始出现轻微的不对称，回流泡边界出现不规则
$60 < Re \leq 100$	流动从两侧分离，并形成交替脱落的漩涡
$100 < Re \leq 2\ 000$	交替的漩涡直接从圆柱上脱落，回流泡完全消失
$2\ 000 < Re \leq 2 \times 10^5$	分离前仍是层流状态，漩涡的形成区域逐渐减小，形成小尺度的漩涡
$2 \times 10^5 < Re \leq 5 \times 10^5$	此时处于临界状态，在湍流形成之前，边界层变得不稳定，尾流宽度和阻力系数明显减小，斯特劳哈尔数增加

表3 不同尾流状态与雷诺数的对应关系(续)  
Tab. 3 Corresponding Relationship Between Different Wake States and Reynolds Number (Continued)

雷诺数的取值范围	尾流形态
$5 \times 10^5 < Re \leq 3.5 \times 10^6$	此时处于超临界状态, 湍流分离, 相继又发生层流分离和湍流再附着, 在圆柱的每一侧形成附着气泡
$Re > 3.5 \times 10^6$	此时处于跨临界状态, 分离气泡消失, 圆柱尾流周期性再现

### 1.3.2 数字化测量技术的兴起

随着飞行热线 (Flying-Hot-Wire, FHW)、热线

表4 各种测量技术对比

Tab. 4 Comparison of Various Measurement Techniques

测量技术	优点	缺点	成本	互补方案
FHW	时间解析能力强, 测量范围广, 解决回流问题, 频率可达 20 kHz	侵入性强, 数据处理难度大, 测量时间和空间受限	系统成本高	可与 PIV 结合, 探测光学盲区
HWA	时间分辨率、频率和空间分辨率极高, 特别是针对点的测量, 点频率可达 100 kHz 以上	侵入式测量, 对流动方向不敏感, 且仅能实现单点测量, 无法实现瞬时全场测量	与激光光学测量系统相比, 成本低	与 PIV/TRPIV 结合, 实现时空数据融合, 补充高频信息
PIV/DPIV	非侵入式的全场测量, 对速度方向敏感, 速度的大小和方向能准确确定	时间分辨率低, 通常不超过 100 Hz, 对示踪粒子的依赖性较强	成本处于居中水平	可与 HWA 结合使用
TRPIV	时间分辨率高, 频率可达 20 kHz 甚至更高, 较易获得时间序列数据	数据存储和处理难度高	成本极高	可与 HWA 一起使用, 重建高时空分辨率流场
$\mu$ PIV	空间分辨率能达到微米级, 可捕捉微观尺度下的流动细节, 仍具有 PIV 非侵入式全场测量的优点	在微观尺度下, 由于示踪粒子的布朗运动不可忽略, 增加了测量误差来源, 采样频率受高速相机限制, 从数赫兹到数千赫兹不等	成本高	无直接替代方案

由于FHW技术具有一定的局限性, 不能在壁面附近使用, 且这种测量技术具有一定的干扰性, 导致系统误差的数量级较大, 故目前主流的测试技术是PIV技术。FUJISAWA等<sup>[21]</sup>采用PIV方法测量了瞬时速度数据, 并利用这些瞬时数据对压力泊松方程进行了求解, 同时通过对圆柱周围的压力和流体力进行对比分析, 验证了该方法的有效性。GOHARZADEH等<sup>[22]</sup>提出了一种非侵入式试验方法, 在雷诺数 $Re=7\ 670$ 条件下利用PIV方法对单圆柱进行了试验研究, 讨论了圆柱后面产生的不同流动模式。JULIO<sup>[23]</sup>利用采样频率 $f=25\ \text{Hz}$ 的PIV技术研究了自由壁面对圆柱绕流流场的影响, 并利用定量的面内速度矢量场和面外涡度测量方法表明了低雷诺数下圆柱体近尾流的三维性质。

李玲等<sup>[24]</sup>在不同特征参数情形下采用DPIV系

风速仪 (Hot-Wire Anemometry, HWA)、粒子图像测速 (Particle Image Velocimetry, PIV) 和数字图像测速 (Digital Particle Image Velocimetry, DPIV) 等测速技术的兴起及应用, 流场测量的精度和细节捕捉能力不断提升, 研究者开始采用FHW和PIV等方法对雷诺数在 $10^5$ 量级及以下条件下的单圆柱绕流尾流形态进行试验研究, 各种测量技术对比见表4。CANTWELL等<sup>[20]</sup>采用FHW技术研究了单圆柱的近尾流场, 通过试验发现, 产生的湍流很大一部分都集中在鞍点附近, 而这种湍流产生机制很有可能是由涡的拉伸作用主导的。

统对处于浅水层的直径达1.27 m的单圆柱的尾流流动特性进行了测量, 结果显示: 尾流稳定性参数乃是确定浅水层圆柱绕流流动模式的唯一具有决定性意义的特征参数, 随着尾流稳定性参数的增大, 近尾流区的惨混逐渐减弱; 当尾流稳定性参数约为0.2时, 涡街开始向不稳定尾流转变; 当尾流稳定性参数达到0.45时, 尾流区涡街结构开始向稳定回流区形态转变。受技术条件限制, 该试验只适合在低速流动条件下开展, 高速流动条件下的尾流状态很难实现。

涂程旭等<sup>[25]</sup>在雷诺数分别取值为630、800和950的条件下, 采用PIV技术对圆柱绕流场进行了试验, 结果表明: 随着雷诺数的增大, 在垂直于流体流动方向的区域, 圆柱尾流呈递减趋势; 随雷诺数的增大, 主流对涡的拉伸以及涡量沿流向的传播能力呈

递增趋势；当雷诺数较小时，采用PIV技术能完整地捕捉到涡从生成、脱落、发展直至耗散的全过程；当雷诺数较大时，受采集频率限制，采用PIV技术很难完整地捕捉到涡脱落的全过程。因此，该试验适合在低雷诺数条件下进行<sup>[25]</sup>。

余英俊等<sup>[26]</sup>采用简易的PIV装置测量了圆柱绕流的速度场情况，采用有限容积法和直接积分法对压力场进行了重构，并对采用这些方法所得结果与Fluent模拟结果进行了对比，以此验证速度场测量中出现的误差，并检验了这2种算法的有效性。从试验结果中可看出：在对瞬态压力场进行重构时，若采取第一边界条件，则有限容积法与直接积分法2种重构算法均有较好的稳定性；就PIV实测而言，随着速度场误差不断变大，重构出来的压力场误差慢慢增大；试验采用的PIV系统的测试结果较准确，可为后续研究获取瞬态压力场提供参考。

由于上述研究中采用的PIV技术的采样频率较低，普遍是只有几十赫兹，只适合在低雷诺数条件下应用，而在高雷诺数条件下，对PIV技术的采样频率的要求都是数百至数千赫兹。随着PIV技术的不断发展，江建华等<sup>[27]</sup>在水槽内借助高采样频率的PIV技术深入探究了缝隙对圆柱流场结构的影响，同时采用频谱分析和本征正交分解（Proper Orthogonal Decomposition, POD）方法对开缝圆柱流场相干结构进行了研究。试验结果显示，当雷诺数 $Re=3\ 000$ 时，缝隙产生的吹吸作用能从根本上改变圆柱绕流近区的尾流结构，前6阶模态形态属于流场中最关键的相干结构。第1阶和第2阶模态形态支配着圆柱绕流流场涡街相继脱落的整个过程，其中：1阶或2阶模态系数即是尾迹涡的固有频率；第3阶和第4阶模态形态支配着脱落旋涡沿流向方向进行能量运输的过程；第5阶和第6阶模态形态内的同向涡旋结构会对旋涡缓慢脱离柱体的过程产生作用，且会对主旋涡能量起到一定的衰减效果。图4为第1阶与第2阶模态流场结构（ $Re=3\ 000$ ）<sup>[27]</sup>。

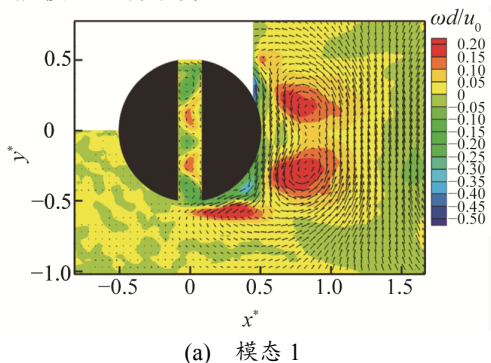


图4 第1阶与第2阶模态流场结构（ $Re=3\ 000$ ）  
Fig. 4 Structure of First and Second-Order Modal Flow Field ( $Re=3\ 000$ )

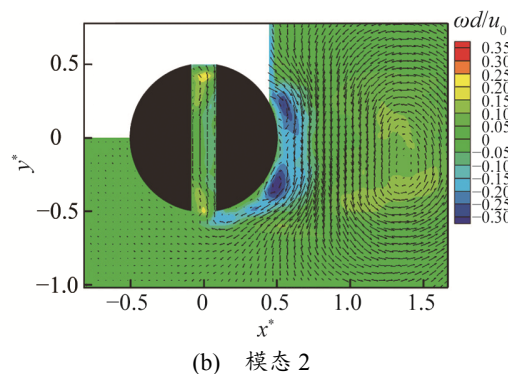


图4 第1阶与第2阶模态流场结构（ $Re=3\ 000$ ）（续）  
Fig. 4 Structure of First and Second-Order Modal Flow Field ( $Re=3\ 000$ ) (Continued)

图4能清晰地看到呈现出明显旋向交替特征的涡街结构，且该涡街结构沿圆柱中轴线对称。BRAZA等<sup>[28]</sup>在 $Re=140\ 000$ 条件下利用二维粒子图像测速技术（Two-Dimensional Particle Image Velocimetry, 2-D PIV）、三维粒子图像测速技术（Three-Component Particle Image Velocimetry, 3-C PIV）和高频率2-D PIV对单圆柱尾流的流场进行了研究，并根据雷诺平均分解和相平均分解确定了近尾流相干结构和湍流应力的拓扑结构。DOBROSELSKY<sup>[29]</sup>在临界状态下（即雷诺数的取值范围为 $1.75 \times 10^5 \sim 2.90 \times 10^5$ ）采用PIV方法对单圆柱体进行了横向流试验，同时研究了其尾流中的涡流结构，证明了近尾流参数受雷诺数的影响。

PERRIN等<sup>[30]</sup>采用时间解析粒子图像测速（Time-Resolved Particle Image Velocimetry, TRPIV）和三维粒子图像测速（Stereoscopic PIV, 3-CTRPIV）光学测量技术对高雷诺数下圆柱的近尾流进行了试验研究，对受相干结构运动影响的湍流结构的特性进行了物理分析。该研究为验证和改进高雷诺数下物体周围流动的湍流模型奠定了基础。

王勇等<sup>[31]</sup>在雷诺数 $Re=2.74 \times 10^4$ 的条件下，借助尺寸为 $0.55\text{ m} \times 0.40\text{ m}$ 的声学风洞，利用采样频率为 $10^3\text{ Hz}$ 的时间解析PIV方法测量了圆柱绕流尾迹的非定常流场特性，图5为试验设置示意（俯视图）<sup>[31]</sup>。与此同时，还提出了一种依据速度场之间相关性的相位平均分析办法，全面且细致地剖析圆柱上下两侧旋涡交替生成、脱落、发展直至耗散的整个演化过程，并且这种方法在非定常流场测量领域有着普遍可推广的重要意义。

随着研究的不断深入，研究人员对圆柱绕流的试验研究逐渐由宏观尺度向微观尺度转变。KINOSHITA等<sup>[32]</sup>将高速共聚焦扫描仪与传统的微尺度粒子图像测速（Micro-Particle Image Velocimetry,  $\mu$ PIV）技术相结合，提出了一种微流诊断技术“高速共聚焦微粒图像测速法”，同时采用

该PIV系统获得了液滴内部的体积速度分布, 研究了液滴内部的三维流动结构。研究表明, 采用高速相机和 $\mu$ PIV可实现对微通道内流体流动的三维速度测量, 研究成果可供微通道内的流体流动研究参考。

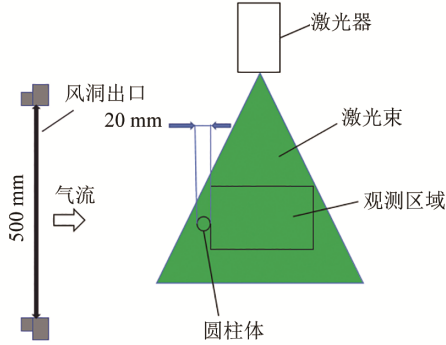


图5 文献[31]中的圆柱绕流尾迹非定常流场特性试验设置示意图(俯视图)

Fig. 5 Schematic Diagram of Non-Steady Flow Field Characteristics Experimental Setup for Cylindrical Flow Wake in Reference (Top View)

JUNG等<sup>[33]</sup>采用 $\mu$ PIV方法研究了微通道中细长比 $L/D=1.5$ 的微圆柱的流场, 测量了详细的流场参数(如展向涡度和湍动能)。试验结果表明, 当 $Re=400$ 时, 该微通道内的流体由定常流动变为非定常流动, 且由于后滞点涡的脱落, 回流区减小。

李济超等<sup>[34]</sup>将去离子水作为工质, 利用微观粒子成像 $\mu$ PIV系统对 $6 < Re < 300$ 条件下微通道内直径 $D=0.4$  mm的单圆柱的绕流特性进行了研究, 仔细分析了不同雷诺数和不同高度流层条件下速度场、涡量场、湍流强度场和回流区漩涡结构的具体状况。该研究能在一定程度上助力揭示微通道内部微肋强化换热的内在机理, 同时对微通道换热器的优化设计有一定的指导价值。

陶梦琦等<sup>[35]</sup>基于Micro-PIV试验装置对微通道

内流体绕流微圆柱的流场特性进行了试验研究, 通过控制入口的流量研究了流体绕流单个微圆柱的流场特性, 分析了流场内的漩涡结构、平均速度、涡量和相位角。该研究为微针肋型散热器的强化换热和内部结构稳定性分析提供了数据支持。

#### 1.4 数值模拟研究现状

随着计算机技术不断地发展以及计算流体力学(Computational Fluid Mechanics, CFD)理论的日臻完善, 研究人员利用Fluent、CFX和STAR-CCM+等CFD软件对流体问题进行了测试与验证, 具有极高的可靠性, 特别是当试验条件不允许时, 数值模拟能发挥重要作用。随着CFD技术的不断发展, 研究人员主要采用直接数值模拟(Direct Numerical Simulation, DNS)、雷诺平均纳维-斯托克斯(Reynolds-Averaged Navier-Stokes, RANS)、大涡模拟(Large Eddy Simulation, LES)、分离涡模拟(Detached Eddy Simulation, DES)、尺度自适应模拟(Scale-Adaptive Simulation, SAS)、部分平均纳维-斯托克斯(Partially-Averaged Navier-Stokes, PANS)和2阶矩雷诺应力模型(Reynolds Stress Model, RSM)等数值方法对单圆柱绕流进行了研究, 各湍流数值模拟方法的适用范围见表5。

在低雷诺数条件下, 研究人员大多采用DNS和RANS等数值模拟方法对单圆柱绕流进行研究。CANUTO等<sup>[36]</sup>为研究圆柱绕流的二维黏性可压缩流动, 在 $Re$ 为20~100, 马赫数 $Ma$ 为0~0.5条件下, 采用DNS方法对二维圆柱绕流进行了研究, 结果表明, 随着雷诺数的增加, 尾流的伸长变得越来越显著。OHTA等<sup>[37]</sup>为获得湍流的统计量和壁面摩擦因数, 采用DNS方法对不同条件下的圆柱体轴向湍流进行了数值模拟。闵强利<sup>[38]</sup>采用 $k-\epsilon$  RANS模型对低雷诺数条件下的单圆柱绕流进行了数值模拟, 成功模拟了卡门涡街从产生到脱落的整个过程。

表5 圆柱绕流中各湍流数值模拟方法对比

Tab. 5 Comparison of Turbulence Numerical Simulation Methods in Cylindrical Flow

模型名称	核心方法	雷诺数范围	关键优势与劣势
DNS	不依赖任何湍流模型, 直接求解 Navier-Stokes 方程	主要适用于低雷诺数条件, 即 $Re \leq 10^3$	理论精度高, 无模型误差, 能准确捕捉近壁分离点和回流区长度, 但网格量需求大, 计算成本相比其他模型最高
RANS	通过时间平均求解 Navier-Stokes 方程, 常用的模型有 S-A 模型和 $k-\epsilon$ 模型等	从低雷诺数(40~50)到超高雷诺数( $10^6$ )都适合	计算成本相对较低, 计算效率较高, 且适用于稳态或准稳态计算, 但在预测大规模分离流动方面表现不佳, 且无法捕捉瞬态细节

表 5 圆柱绕流中各湍流数值模拟方法对比 (续)

Tab. 5 Comparison of Turbulence Numerical Simulation Methods in Cylindrical Flow (Continued)

模型名称	核心方法	雷诺数范围	关键优势与劣势
LES	直接模拟大涡, 并对小涡进行建模, 常用的模型有 Smagorinsky 模型、动态 Smagorinsky 模型和 WALE 模型等	主要适合的雷诺数范围为 $2 \times 10^3 \sim 5 \times 10^5$	能实现高精度模拟, 适合瞬态流动, 在分离流、旋涡脱落和尾迹预测方面表现良好, 但计算成本高, 且模型对网格要求较高, 特别是在近壁区域对网格的要求比较精密
DES	一种结合 RANS 与 LES 的混合模型, 壁面附近用 RANS, 分离区用 LES, 常用的模型有 SST $k-\omega$ -DES 和 Realizable $k-\varepsilon$ -DES 等	高雷诺数和低雷诺数都适用, 但在较低雷诺数 ( $Re \leq 10^3$ ) 条件下不适用, 此时建议采用 DNS 或层流模型	计算效率高, 平衡计算精度与成本, 是预测大规模分离流动的主要途径, 能捕捉尾迹涡脱落和回流区结构, 但对计算资源极度敏感
SAS	一种结合 RANS 与 LES 的混合模型, 常见的模型如 SST-SAS	高雷诺数和低雷诺数都适用, 主要适合中高雷诺数, 在较低雷诺数 ( $Re \leq 10^3$ ) 条件下不适用, 此时建议采用 DNS 或层流模型	无需预先定义分离区域, 模型能根据流动特性自动调整解析尺度, 计算效率与精度平衡, 但计算成本略高
PANS	一种 RANS 与 LES 的混合模型	高雷诺数和低雷诺数都适用, 主要适合中高雷诺数, 在较低雷诺数 ( $Re \leq 10^3$ ) 条件下不适用, 此时建议采用 DNS 或层流模型	计算精度高, 灵活性强, 但计算成本高, 对参数敏感
2 阶矩 RSM	直接求解雷诺应力输运方程和耗散率方程	高雷诺数和低雷诺数都适用, 但在高雷诺数条件下优势明显	对复杂流动的预测精度高, 通用性强, 但计算成本高, 收敛慢

詹昊等<sup>[39]</sup>在雷诺数处于亚临界区到极超临界区范围内的情况下, 采用 Fluent 软件对圆柱绕流进行了研究, 结果表明, 当雷诺数达到  $10^5$  时, 会出现阻力危机现象, 涡脱落形态随着雷诺数的增大先从规则变化到不规则, 随后又转变为规则, 流动呈现明显的三维特性。

高雷诺数条件下的数值模拟大多采用的是 LES 方法, 而该方法存在一定的不足, 占用的计算资源颇多, 计算量颇为大, 且对边界层的增长和分离状况的描述不够精准。SPALART 等<sup>[40]</sup>提出了一种将雷诺平均与大涡模拟相结合的方法(即分离涡模拟), 该方法不仅所占计算资源较少, 计算量较小, 而且对大尺度分离湍流流动的模拟较好。PARNAUDEAU 等<sup>[41]</sup>在雷诺数  $Re=3\ 900$  条件下采用 LES 方法对单圆柱绕流进行了数值模拟研究, 同时采用 HWA 和 PIV 技术对圆柱流场进行了测量, 数值模拟结果与试验结果较为吻合。PALKIN 等<sup>[42]</sup>在雷诺数取值为  $3.9 \times 10^3$  和  $1.4 \times 10^5$  条件下采用二次矩 RSM 和线性涡黏性模型 (Linear Eddy-Viscosity Models, LEVM) 对单圆柱绕流进行了模拟, 同时对模拟结果与 LES 和试验结果进行了对比, 结果表明, 在高雷诺数条件下, 2 阶矩 RSM 的性能明显优于 LEVM, 且模拟所得结果与 LES 和试验数据高度吻

合。李燕玲等<sup>[43]</sup>采用基于 S-A 湍流模型的 DES 方法对雷诺数分别取值为  $2 \times 10^4$ 、 $10^5$ 、 $3 \times 10^5$  和  $10^6$  时的单圆柱绕流湍流场进行了三维数值模拟, 深入剖析了流场的形态和升阻力, 给出了阻力系数和升阻力频谱, 并与以往通过试验和其他方法模拟所得结果进行了比较。该模拟结果显示, 在高雷诺数条件下, 圆柱在尾流形态和柱面所受作用力方面都明显体现出三维的特性; 通过对文中所涉及雷诺数下圆柱的平均阻力系数进行分析可发现, 该系数与阻力危机现象较为吻合; DES 方法完全能高效且精确地对高雷诺数下圆柱的绕流状况进行模拟, 这在高雷诺数三维模拟方法方面具有重要意义<sup>[43]</sup>。

战庆亮等<sup>[44]</sup>开发了一种基于 C++ 语言和有限体积法的三维非结构化网格大涡模拟计算程序, 针对雷诺数  $Re=3\ 900$  条件下的均匀来流圆柱绕流问题, 利用高稳定性、高精度的 2 阶离散格式以及 Smagorinsky 亚格子湍流模型进行了数值模拟。该数值模拟结果表明: 采用三维非结构化网格、计算步长和高稳定性 2 阶离散精度大涡模拟方法计算所得湍流场 1 阶统计特性和 2 阶统计特性与试验值较为吻合, 验证了采用大涡模拟程序模拟亚临界雷诺数下的圆柱绕流流场平均值和脉动值的合理性。同时, 该研究在亚临界雷诺数条件下采用大涡模拟方法计

算模拟了圆柱绕流的流场, 并对平均阻力系数、斯特劳哈尔数和回流区长度等平均积分量进行了比较分析, 验证其与试验值基本一致。黄技等<sup>[45]</sup>采用Fluent软件对雷诺数分别取值为50、500、5 000和50 000时的圆柱绕流过程的流场分布进行了展示对比, 并着重对 $Re=500$ 时的卡门涡街现象进行了分析。研究表明: 当 $50 < Re < 500$ 时, 圆柱绕流过程出现卡门涡街; 当 $Re > 500$ 时, 卡门涡街逐渐失去规则性和周期性; 当 $Re \approx 5 000$ 时, 卡门涡街尾部完全失去规律性。韩晨健等<sup>[46]</sup>为研究不同表面粗糙度和间隙比条件下的单圆柱流场特性, 采用RANS模型对近壁粗糙的单圆柱绕流进行了数值模拟, 结果表明, 在粗糙度相同的情况下, 升力系数的幅值随着间隙比的增大而增大。涂慧玲等<sup>[47]</sup>为探究亚临界雷诺数条件下的单圆柱尾流特性, 采用改进延迟分离涡模拟(Improved Delayed Detached Eddy Simulation, IDDES)方法对 $Re=3 900$ 条件下的单圆柱绕流进行了数值模拟, 结果表明, 来流湍流度发生变化会导致亚临界条件下单圆柱绕流的尾流区域出现不同的流型。

圆柱绕流流动往往涉及多相流问题, 而在流固耦合问题研究中, 对单圆柱绕流的研究主要体现在圆柱的振动特性和涡激振动等方面。ZHAO等<sup>[48]</sup>采用拉格朗日-欧拉(Arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE)动网格有限元法和SST  $k-\omega$ 湍流模型, 在雷诺数 $Re=5 000$ 条件下, 对单圆柱在稳态和振荡流组合中的涡激振动(Vortex-Induced Vibration, VIV)进行了数值研究, 结果发现组合流能显著拓宽锁频范围, 且在流量比为0.4和0.6时最宽, 该研究为波浪联合作用提供了参考。吴晓笛等<sup>[49]</sup>提出了一种基于浸入边界-多松弛时间格子玻尔兹曼通量求解法(Immersed Boundary Method Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Flux Solver, IB-MRT-LBFS)的弱耦合算法, 对单圆柱横向涡激振动和单圆柱双自由度涡激振动问题进行了数值模拟, 结果表明, 该弱耦合算法能准确预测圆柱涡激振动的锁定区间、振动响应和受力情况, 以及捕捉尾流场的结构形态, 验证了该算法在求解流固耦合问题方面的有效性和可行性。WANG等<sup>[50]</sup>在雷诺数 $Re=100$ 条件下, 采用一对合成射流对单圆柱尾流和一维涡激振动进行了主动控制, 并采用格子玻尔兹曼方法对其进行了数值模拟, 结果表明, 合成射流对一维涡激振动有很好的控制效果。ZHU等<sup>[51]</sup>对振荡流中的单圆柱体的两自由度涡激振动进行了数值模拟研究, 结果表明, 均方根升力系数先增大后减小, 且随着减速速度的增加而趋于稳定。

圆柱绕流广泛出现在海洋工程领域, 特别是在海洋油气资源开采中, 立柱式海洋结构物也会受到

波浪与流体的相互作用。刘正浩<sup>[52]</sup>基于自主开发的naoe-FOAM-SJTU求解器开发了三维波流水池模块, 使其能预报波流联合作用下结构物周围的复杂流场和水动力特性, 同时修改了OpenFOAM原有的SST  $k-\omega$ 模型, 在波流水池模块中引入浮力修正了SST  $k-\omega$ 模型。此外, 该研究针对波、流与圆柱的相互作用问题进行了一系列数值模拟, 验证了规则波下单圆柱的波浪爬升和波浪载荷模拟、带自由面的有限长圆柱绕流模拟的可靠性与准确性。

由以上分析可知, 早期受试验基础设施和计算机技术条件限制, 有关单圆柱绕流的试验研究主要采用物理模型和原型观测方法开展。随着试验技术的不断发展, 研究人员开始利用FWH、HWA、PIV和DPIV等方法对 $Re \leq 10^5$ 量级条件下的单圆柱绕流进行了试验研究, 但更高雷诺数条件下的试验研究很难进行。随着CFD技术的不断发展, 数值模拟方法逐渐成为单圆柱绕流问题研究的主要手段。在低雷诺数条件下, 大多数学者采用DNS和RANS方法对圆柱绕流问题进行数值模拟研究, 所得结果基本上都是比较好的; 在高雷诺数条件下, 大部分学者采用(LS方法对单圆柱绕流问题进行数值模拟研究, 仅有部分学者采用DES)、离散涡方法(Discrete Vortex Method, DVM)、2阶矩RSM、RANS和分块耦合等先进的数值方法深入探索圆柱绕流问题。

## 2 双圆柱绕流研究现状

### 2.1 基本概念

双圆柱结构在很多工程领域都有应用, 如航空工程中的机翼支撑与飞机起落架、海洋工程中的海洋立管、钻井管线、潜望镜及其导杆、航天工程中的火箭助推器、土木工程中成排布置的烟囱、近海工程中的海洋平台构件、电力工程中的输电线和化学工程中的管架等。然而, 有关双圆柱绕流的系统研究相比单圆柱绕流研究起步较晚。

与单圆柱绕流相比, 双圆柱绕流的流场结构更为复杂, 由于双圆柱流场之间存在相互干扰, 这种干扰效应会导致流态、力的大小和旋涡脱落发生很大变化。在计算过程中, 必须考虑不同来流方向对圆柱水动力特性的影响。2个相同的圆柱在垂直于来流速度方向上有无数种可能的排列方式。斯兰特科维奇<sup>[53]</sup>将双圆柱的排列方式分为3种(见图6<sup>[53]</sup>), 具体如下。

1) 串列布置(T)。一个圆柱相对于来流方向在另一个圆柱后面。

2) 并列布置(SS)。2个圆柱都正对来流方向。

3) 错列布置(S)。顺流向间距比 $S/D$ (其中: $S$ 为两圆柱圆心之间的距离)和横流向间距比 $T/D$ (其中 $T$ 为两圆柱圆心之间的距离)任意组合的2个圆柱。

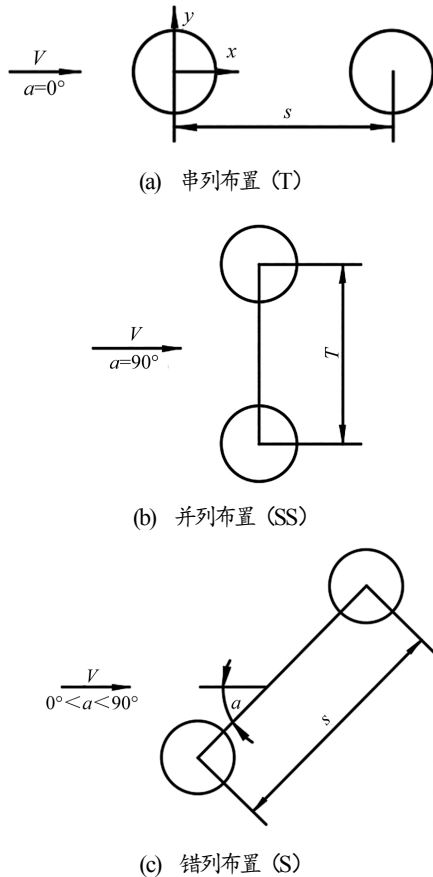


图6 双圆柱定义示意图

Fig. 6 Diagram Illustrating Definition of Double Cylinders

## 2.2 双圆柱试验研究现状

### 2.2.1 双圆柱绕流特性与间距

双圆柱绕流特性受多种因素的影响，间距比和双圆柱之间的排列方式对双圆柱的绕流特性有显著影响。塞尔维亚学者ZDRAVKOVICH<sup>[54]</sup>通过试验发现，串联布置的双圆柱周围流场与圆柱间距密切相关。该研究表明：当顺流向间距比 $S/D < 3.5$ 时，两圆柱间隙内流体的流速较低，而下游圆柱尾流场的流体流速高于上游圆柱；当顺流向间距比 $S/D > 3.5$ 之后，流速和流场分布均显著增大，且当顺流向间距比 $S/D$ 接近3.5时，上游圆柱尾流场速度分布出现突变。

IGARASH<sup>[55]</sup>通过试验研究了 $Re$ 为8 700~52 000，双圆柱轴顺流向间距比 $S/D$ 为1.03~5.00时，两柱串联流动的特性，结果表明：当顺流向间距比 $S/D=3.5$ 时，两柱之间形成了准平稳涡流；当圆柱间距比 $S/D$ 为1.1、1.6、2.3和3.1时，两柱周围的流动结构随雷诺数的变化而变化。SUMNER等<sup>[56]</sup>采用流动可视化技术、热膜风速仪和PIV技术研究了并列布置的等直径双圆柱的绕流特性，结果发现，当 $Re$ 为500~3 000，间距比 $T/D$ 为1.0~6.0时，双圆柱绕流存在3种形态：当小间距比 $T/D < 1.2$ 时，单钝体涡脱

落，形成单一的涡街；当中等间距比 $1.2 < T/D < 2.2$ 时，双圆柱绕流为偏流模式，且在两圆柱后方分别形成宽窄不同的尾流区；当大间距比 $T/D > 2.2$ 时，双圆柱绕流为对称流动。

周杰等<sup>[57]</sup>为研究串联双圆柱绕流规律，设计了一种开式循环水槽，将染色法与PIV相结合，对不同雷诺数和不同间距比情况下的串联双圆柱绕流进行了可视化试验。当 $Re=200$ ，间距比顺流向 $S/D \leq 3D$ 时，串联双圆柱的中心距对上游圆柱和下游圆柱尾流的流动状态有关键影响，具体表现为上游圆柱的尾流呈现出较为稳定的态势，而下游圆柱的尾流处于非稳定状态。在特定的雷诺数和间距比条件下，双圆柱尾流中正负涡的形成和脱落呈现出明显的周期性特点。

ZHANG等<sup>[58]</sup>在 $Re$ 为22 000~88 000，顺流向间距比 $S/D$ 为3.5~5.5，横流向间距比 $T/D$ 为0.7~2.7条件下，对错列布置的双圆柱的双自由度涡激振动特性进行了试验研究，结果表明：上游圆柱的振动响应趋势基本上与单圆柱的振动趋势一样，但其最大振幅较小；下游圆柱出现独特的“双峰”振幅响应。

### 2.2.2 涡街与涡体脱离频率

在双圆柱绕流特性研究中，涡街和涡体脱离频率一直是研究的重点，当流体绕过圆柱体时，会在其后方形成周期性交替脱落的旋涡，这些旋涡排列成行，形成卡门涡街。涡街的形成会导致流场中的压力和速度发生波动，这些波动可能会对结构产生激励作用，引起结构振动。因此，研究涡街形成机制和涡体脱离频率具有重要意义。WILLIAMSON<sup>[59]</sup>通过试验发现，当圆柱体出现2排涡街且涡脱方向相反时，2排涡街会相互作用，合并成一个大尺度的涡街，并将其定义为双涡涡街，其与卡门涡街类似，但该双涡涡街是由涡对相互缠绕旋转形成的。

BEARMAN等<sup>[60]</sup>通过对并列的双圆柱进行试验研究发现：当横流向间距比 $T/D < 0.5$ 时，涡体的脱离频率等效于2倍直径宽度的阻碍体的涡体脱离频率；当横流向间距比 $T/D > 1.0$ 时，涡体的脱离频率与单个圆柱绕流的频率一致；当横流向间距比 $0.5 < T/D < 1.0$ 时，以上2种频率均有发现。

XU等<sup>[61]</sup>为研究2个等直径的串联双圆柱中雷诺数和间距比对涡旋脱落特性的影响，采用热线风速仪和激光诱导荧光技术(Laser-Induced Fluorescence, LIF)对该双圆柱流场进行了可视化试验，结果发现，在共脱落流态下，等直径串联的2个圆柱的涡脱频率相同。QIN等<sup>[62]</sup>利用激光测振仪、压力扫描仪和PIV等设备或技术对不等直径串联双圆柱的流致振动进行了试验研究，测量了圆柱涡脱频率和流场结构。WANG等<sup>[63]</sup>对2个不同直径的串联双圆柱的尾流进行了研究，结果发现，当大小圆柱直径比为0.60和

0.65时, 上、下2个圆柱之间的涡脱频率呈现2倍的关系。ALAM等<sup>[64]</sup>为研究串联双圆柱的涡脱落特性, 采用热线风速仪和PIV等设备或技术测量了不等直径串联双圆柱的涡脱落频率、流场结构和流体作用力, 并根据直径比和顺流向间距比的不同将流态划分成了锁定、间歇锁定、无锁定、亚谐波锁定和剪切层再附着5种。

### 2.2.3 圆柱排列与阻力系数和降噪

双圆柱的排列方式对其阻力系数和降噪效果有重要影响。通过优化圆柱的排列方式、间距和形状等参数, 可减小阻力系数, 并减少噪声的产生和传播。王智辉<sup>[65]</sup>通过水槽试验对圆柱的横向和纵向排列情况进行了研究, 结果发现, 由于桩具有遮流作用, 两柱之间的旋涡区脉动会有所减弱, 水位出现壅高现象, 流速会变小, 两柱之间的平均阻力系数随之减小。

王龙军<sup>[66]</sup>在 $0.80 \times 10^4 \leq Re \leq 2.42 \times 10^4$ 条件下对非等直径串联双圆柱的流动特性进行了试验研究, 结果显示, 根据主频 $S_1$ 的不同, 可将双涡脱落流态划分为涡脱锁、次谐波锁定和无锁定3个子流态。在特定间距比情形下, 下游圆柱涉及到的流体力、时均阻力系数和涡脱频率等都呈现出跳变现象。通过无量纲分析发现, 临界间距比与直径比 $d/D$  (其中:  $d$ 为小圆柱的直径;  $D$ 为大圆柱的直径) 之间存在反比关系, 而这种变化形式与上游圆柱的漩涡形成长度有直接且紧密的关联。SCHEWE等<sup>[67]</sup>在 $10^4 < Re < 10^7$ 量级条件下采用风洞技术对串联双圆柱的受力特性进行了试验研究, 结果表明, 在串联双圆柱中, 上游圆柱的阻力曲线与单圆柱的受力曲线类似, 而下游圆柱的阻力曲线与上游圆柱的阻力曲线呈现相反的发展趋势, 即在亚临界雷诺数条件下为负值, 在超临界雷诺数条件下突变为正值, 在高超临界雷诺数条件下再次显著下降。

在降噪研究方面, 也有学者对此深入开展试验研究。美国NASA的Langley研究中心为研究飞机起落架的噪声, 将起落架简化成了串联双圆柱模型, 并通过风洞试验系统地测量了双圆柱流场特性, 为后续工程噪声研究提供了大量试验数据<sup>[68]</sup>。LI等<sup>[69]</sup>利用北航D5声学风洞研究了螺旋电缆技术对串联双圆柱的降噪效果和降噪机制, 结果表明, 螺旋电缆技术对中等间距比 $S/D=2.5$ 和大间距比 $S/D=4$ 的降噪效果较为显著。王大庆等<sup>[70]</sup>在消声风洞环境中对串联双圆柱干涉噪声的控制进行了试验研究, 并针对周期性凸起结构进行了降噪方面的研究, 同时对不同结构参数和不同工况下呈现出的降噪规律进行了分析比较, 研究成果可供高速列车受电弓和飞机起落架等钝体扰流干涉噪声控制参考。

### 2.3 双圆柱数值模拟研究现状

在双圆柱数值模拟方面, 研究人员采用格子玻尔兹曼方法(Lattice Boltzmann Method, LBM)离散涡方法、有限体积法、有限元法和紧致插值曲线(Constrained Interpolation Profile Method, CIP)数学模型等数值方法对双圆柱绕流进行研究。费宝玲等<sup>[71]</sup>为探究不可压缩流动情况下的二维串联双圆柱中, 不同间距对圆柱之间相互作用和尾流特性的影响, 特意挑选雷诺数 $Re=200$ 这样的非定常条件, 并将顺流向间距比 $S/D$ 设定为2、3和4开了数值分析, 同时对能用来描述圆柱绕流问题的关键参量(如升力系数、阻力系数和尾涡脱落频率等)进行了计算, 证实了采用Fluent开展分析的有效性。XU等<sup>[72]</sup>为研究等直径并列振动双圆柱尾流干涉的影响, 采用LBM方法对该双圆柱进行了数值模拟, 计算结果表明, 并列双圆柱的振动对尾流有显著影响, 当振动幅度足够大时, 振动会阻止涡的脱落和形成。

田启龙等<sup>[73]</sup>采用离散涡方法对二维等直径双圆柱绕流的水动力特性进行了数值分析, 对双圆柱在串联、并列和交错排列情况下的流动干涉问题进行了计算, 通过对比2个圆柱的升力系数、阻力系数和斯特劳哈尔数以及尾涡结构观察了2个圆柱体产生的干涉效应, 同时通过对比试验, 利用其他数值模拟结果验证了本文所采用方法的可靠性, 对间隙比产生的影响进行了探讨, 所得成果可供双圆柱绕流问题研究参考。

崔雪扬等<sup>[74]</sup>采用有限体积法对串联放置的双圆柱的二维不可压缩流动进行了直接数值计算, 在分析斯特劳哈尔数和升阻力系数等积分量的基础上, 从流动多尺度层面研究流场分布和涡结构, 发现了多尺度涡相互作用下形成更小尺度涡的过程及机理。

王凯鹏等<sup>[75]</sup>采用紧致插值(Constrained Interpolation Profile, CIP)曲线数学模型研究了均匀来流下间距比 $L/D$ 和雷诺数 $Re$ 对串联双圆柱周围流场的影响, 并分析了剪切来流中剪切率 $K$ 对流场的作用。

涂佳黄等<sup>[76]</sup>采用四步半隐式特征线分裂算子有限元方法对等直径串联双圆柱的双自由度涡激振动进行了数值模拟, 计算结果表明, 上游圆柱的共振区比下游圆柱更宽, 而下游圆柱受固有频率比和剪切来流的影响比上游圆柱更大。SKONECKI等<sup>[77]</sup>在 $Re=3\ 900$ 条件下采用RANS数值方法对双圆柱在串联布置、并列布置和错列布置3种排列方式下的流动模式进行了数值模拟, 并对所得结果与先前在较低雷诺数条件下观测所得结果进行了对比, 结果表明, 串联布置的双圆柱对雷诺数最敏感, 交错排列的双圆柱绕流的复杂程度较高, 即在小角度下流动模式与串联布置的类似, 在大角度下流动模式与并列布

置的类似。

近年来，研究人员开始在等直径双圆柱绕流的基础上研究不等直径双圆柱绕流问题，ZHAO等<sup>[78]</sup>采用基于闭合 $k-\omega$ 湍流模型的有限元方法对稳流中不等直径的错列布置双圆柱的水动力特性进行了数值模拟研究，结果表明，小圆柱体的相对位置对双圆柱体的水动力特性和涡脱落特性有显著影响。RAHMANIAN等<sup>[79]</sup>为研究不等直径并列双圆柱的涡激振动，在雷诺数 $Re=5\ 000$ 条件下对该双圆柱进行了数值模拟研究，结果发现，小圆柱对大圆柱的振幅有显著影响，即将小圆柱与大圆柱并列放置会导致大圆柱的振动位移幅度更大。SHENOI等<sup>[80]</sup>在固定间距比和 $Re=2\ 000$ 条件下，采用RANS方法对2个不等直径并列双圆柱绕流的升阻力系数和直径比对流场的影响进行了数值模拟。张艺鸣等<sup>[81]</sup>采用CFD方法对不同间距比下的二维不等直径并列双圆柱进行了数值模拟，结果表明：当 $T/D \leq 3.0$ 时，双圆柱尾流形成的涡会出现相互融合现象，而这种互扰效应致使斯特劳哈尔数呈现出偏低的状态，同时升力系数的幅值随着时间的推移表现出不稳定的特点；当 $T/D < 3.0$ 时，2个圆柱之间的扰动作用较弱，其水动力系数与单圆柱结果比较接近； $T/D \approx 3.0$ 时，可认为是临界间距比。

由上述研究可知，目前有关双圆柱绕流的试验研究主要集中在雷诺数、间距比和排列方式等方面，探讨了这些因素对双圆柱绕流特性的影响，同时研究了涡街与涡脱落频率之间的关系。在数值模拟方面，研究人员多采用离散涡方法、有限体积法和CIP曲线数学模型等数值方法对低雷诺数下的双圆柱绕流进行研究，且研究主要集中在不同排列方式下的等直径圆柱绕流特性方面，并取得了一定的成果。对于双圆柱绕流问题，目前研究的难点和未来方向主要集中在以下3个方面：

1) 复杂流态的机理研究。双圆柱绕流涉及的流态类型繁多，如单钝体模式、剪切层干扰区和及尾迹干扰区等，且在不同流态下双圆柱绕流呈现出的流动特性存在显著差异。同时，这些流态会受到诸多因素的影响，如雷诺数、间距比和直径比，以及剪切来流情况下的剪切率等。因此，这些复杂流态

的形成机理是当前重点关注的一个研究方向。

2) 流控制技术方面的研究。双圆柱绕流中存在着涡激振动和噪声方面的问题，为解决该问题，需对流动控制技术进行研究，当前这已成为一个关键的研究方向。

3) 不等直径圆柱的研究。目前的研究多集中在等直径双圆柱的绕流问题上，对不等直径双圆柱之间的互扰效应开展的研究相对较少。未来的研究可考虑不等直径双圆柱的绕流特性，探索不同直径比对流场的影响，以及临界间距比的确定。

### 3 多圆柱绕流研究现状

#### 3.1 基本概念

多圆柱绕流一般统称为圆柱群，在很多工程领域都有出现，如：在海洋工程领域，为满足石油开采的需求，保障海上钻井平台结构的稳定性，设立了海洋立管群；在土木工程领域，设立有高耸的烟囱群；在电力工程领域，为抑制高压下的电晕放电，采用多分裂导线群来输电，多根导线之间采用间隔器分成多个“子跨度”，其中就涉及多圆柱绕流原理。这类圆柱群的主要特征是直立、浸没，或悬挂在一个没有约束的壁面或边界的开放空间中。在实际工程运用中，可将圆柱群分为3类<sup>[53]</sup>，具体如下：

1) 多根圆柱排列成一排，相对于来流方向是串列、错列或并列的， $P$ 为2个圆柱圆心之间的距离，见图7(a)和图7(c)。

2) 多根圆柱等间距排列，当圆柱数量 $n=3$ 时排列成三角形，当圆柱数量 $n=4$ 时排列成正方形，当圆柱数量 $n>4$ 时排列成多边形，见图7(b)和图7(d)。

3) 多根圆柱“卫星式”排列，常见于海洋工程领域的立管群中，中心管柱的直径为 $D$ ，周围有 $n$ 个直径为 $d$ 的卫星管柱，见图7(e)和图7(f)。

与双圆柱绕流相比，多圆柱绕流的流场结构和旋涡的脱落形态更复杂，会随着圆柱的数量、位置和雷诺数等因素的改变而变化，这使得圆柱群的耦合机理更难以解释，因此目前关于多圆柱绕流的研究大多集中在三圆柱和四圆柱方面。

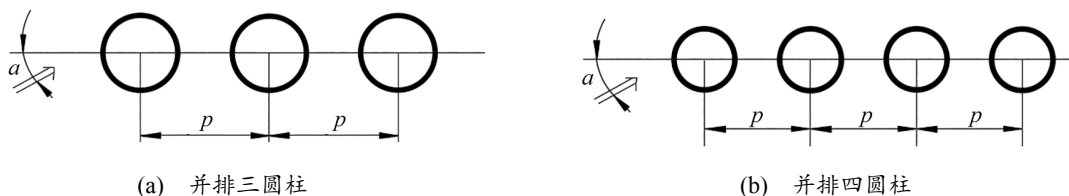


图7 圆柱群排列示意

Fig. 7 Schematic Diagram of Arrangement of Cylindrical Groups

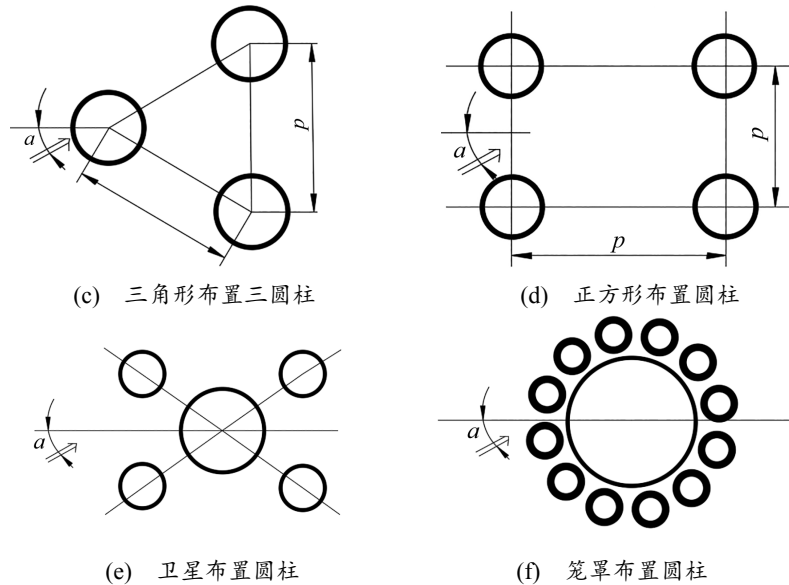


图7 圆柱群排列示意(续)

Fig. 7 Schematic Diagram of Arrangement of Cylindrical Groups (Continued)

### 3.2 多圆柱绕流试验研究现状

当前, 关于多圆柱绕流的试验研究主要以模型试验研究为主, 研究人员在双圆柱绕流的基础上开展了三圆柱绕流研究。SUMNER等<sup>[56]</sup>在 $Re$ 为500~3 000, 中心间距比(即两圆柱圆心之间的距离与圆柱直径之比)为1.0~6.0条件下对并列三圆柱绕流进行了物模试验, 观察了不同中心间距比和雷诺数下的流型变化。杨群等<sup>[82]</sup>在亚临界雷诺数条件下采用刚性模型测压风洞试验方法对不同间距串列三圆柱绕流的时均压力分布和气动力进行了研究, 并与单圆柱和串列双圆柱的压力分布和气动力进行了对比, 研究成果可供实际工程中串列圆柱结构的风荷载取值参考。

在三圆柱成三角形布置方面, 也有不少学者开展相关试验研究。如, POURYOUSSEFI等<sup>[83]</sup>在亚临界雷诺数( $1.26 \times 10^4 < Re < 6.08 \times 10^4$ )条件下对等边三角形排列的三圆柱(见图8<sup>[84]</sup>)进行了风洞试验, 采用压力传感器和HWA详细测量了圆柱的压力分布和每个圆柱后的涡脱落频率, 结果表明, 上游圆柱A后面的压力系数随着间距比(即两圆柱圆心之间的距离与圆柱直径之比)的增大而减小, 流动干扰的影响随着圆柱之间距离的增加逐渐削弱, 从而导致上游圆柱周围的流动特性几乎与单圆柱的流动特性相同。

BANSAL等<sup>[84]</sup>采用流动可视化技术、PIV技术和激光多普勒测速仪对呈等三角形排列的三圆柱的尾流特性进行了试验研究, 结果发现, 除了取向角为 $60^\circ$ 的情况, 在其余取向角情况下均产生不对称尾流。唐炼蓉等<sup>[85]</sup>在 $Re$ 为120、150和200条件下, 采用二维PIV系统对不同横向中心距下的异管径三角形布

置三圆柱绕流进行了可视化试验研究, 结果表明, 在该工况下, 异管径三圆柱绕流中横向中心距的变化对上下游圆柱尾流有明显影响, 主要影响上下游圆柱的相互作用, 从而引起尾流旋涡形态的变化。李勇等<sup>[86]</sup>为研究对称和非对称排列方式下等直径三圆柱的噪声特性和流场, 在开口射流风洞中运用PIV技术和远场麦克风阵列进行了测试, 结果表明, 分离隔板对三圆柱模型流场中的旋涡脱落及相应的纯音噪声能起到很好的抑制作用。

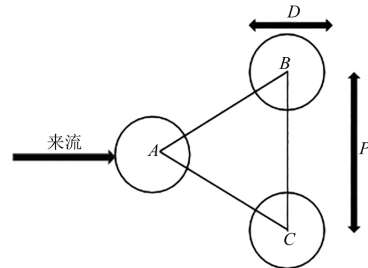


图8 等边三角形布置的三圆柱

Fig. 8 Configuration of Three Circular Cylinders in an Equilateral-Triangular Arrangement

在上述三圆柱绕流研究的基础上, 部分学者开始对四圆柱绕流进行研究。SAYERS<sup>[87-88]</sup>对高雷诺数下四圆柱绕流问题进行了模型试验研究, 分析了间距比对圆柱受力和涡脱落频率的影响, 结果发现, 当间距比小于临界间距比时, 圆柱尾流的涡脱落频率波动很大。

LIU等<sup>[89]</sup>采用模型试验与LES方法相结合的方法对亚临界雷诺数下四柱体的绕流特性进行了研究, 结果表明: 柱体周围的涡流结构是分析圆柱的受力

和 $S_d$ 的关键；受上游立柱泻涡的影响，下游立柱的平均阻力系数小于上游立柱，但下游立柱阻力系数的波动值大于上游立柱。

李景银等<sup>[90]</sup>采用激光诱导荧光技术对按正方形排列且边长间距比为4的顺排4个圆柱形成的层流绕流情况进行了流动可视化研究，同时在雷诺数 $Re=200$ 条件下采用PIV技术对该流场进行了测量，结果表明，2种试验所得结果较为吻合，都呈现出只

有在下游圆柱的后方才会有漩涡出现并脱离的现象。

### 3.3 多圆柱绕流数值模拟研究现状

对于多圆柱绕流的数值模拟研究，研究人员采用不同的数值模拟方法（如有限元方法、有限体积法、有限单元法和浸入边界法）对不同数量、不同排列方式下的多圆柱绕流特性进行了研究，取得了一定的研究成果，见表6。

表6 不同多圆柱绕流数值模拟研究比较

Tab. 6 Literature Comparison on Numerical Simulation Research of Flow Around Multiple Cylinders

文献	圆柱数量/ 个	排列方式	$Re$	间距比	研究方法	研究成果
文献[91]	3	等边三角形排列(正 品字型 a 布 置和倒品 字型 b 布 置)	200	1.5~5.0	有限元法	1) 当小间距比时，圆柱之间的干扰较为严重；2) 在布置 a 中，间距比小于临界值时出现偏流现象，柱 A 的阻力系数减小，而下游柱 B 和 C 的阻力系数增大；3) 在布置 b 中，3 个圆柱的阻力系数与间距比关系变化不大，与单个圆柱流动情形相似
文献[92]	3	并列排列	100	1.1~5.0	浸入边界法	1) 尾流模式与间距比密切相关，共出现 6 种尾流模式；2) 在不同尾流模式下，圆柱的尾涡和受力特性不同；3) 在同步尾流模式下，圆柱尾涡的配对融合和涡街形成过程复杂
文献[93]	4	正方形排 列	100	2.0~5.0	有限体积法	1) 当间距比取值为 4~5 时，存在流型的转变；2) 当间距比取值为 2~4 时，圆柱 2 对其他圆柱的绕流有较强的抑制作用；3) 当间距比取值为 4~5 间时，圆柱 2 的抑制作用逐渐减弱
文献[94]	4	正方形排 列	$10^3 \sim 2 \times 10^4$	—	有限元法	来流攻角发生变化对四圆柱系统振动响应的的影响很大
文献[95]	4	正方形排 列	200	1.6~5.0	有限体积法	当间距比在 2.5~3.5 范围内变化时，流场特性会发生剧烈改变
文献[96]	5	X 型排列 和十字型 排列	100	1.0~5.0	有限体积法	1) 在低雷诺数条件下，五圆柱的流动形式与间距比密切相关；2) 十字型布置和 X 型布置的流动形式既有类似之处，又有各自的特点

由上述分析可知，多圆柱绕流研究的难点体现在数值模拟方法的局限性和试验验证的复杂性方面，在数值模拟方面，目前针对多圆柱绕流问题的数值模拟研究大多采用离散涡方法、有限差分法、有限体积法和浸入边界法等方法实现。然而，这些方法在应对高雷诺数条件下的分离流动问题时有一定的局限性，且很难应用到复杂几何区域中；在试验研究方面，对多圆柱绕流的试验研究主要集中在低雷诺数条件下，对雷诺数量级在 $10^5$ 以上的情况开展的研究很少。因此，一方面未来可尝试开发全新的数

值模拟方法，以此提升高雷诺数条件下的流动模拟精度并提升研究方法的适用范围；另一方面，针对多圆柱绕流开展的研究很可尝试采用试验与数值模拟相结合的方式，尤其是在高雷诺数条件下进行的试验研究，通过对比分析，提升圆柱绕流研究的准确性和可靠性。

## 4 结论

本文从单圆柱绕流、双圆柱绕流和多圆柱绕流 3 个角度出发，详细梳理了圆柱绕流的研究进展情况，

涵盖从低雷诺数层流到高雷诺数湍流的流动特性, 重点探讨了不同方法在流动分离、涡脱落模式、阻力/升力特性、噪声研究和涡激振动等关键问题求解中的应用, 主要得到以下3点结论。

1) 研究方法的现状与不足。圆柱绕流研究方法可分为理论分析、试验研究和数值模拟3种, 但目前的研究主要采用试验研究和数值模拟2种方法, 很少采用理论分析方法, 且研究进展比较缓慢, 尚未对圆柱绕流问题形成完整的数学描述。

2) 研究热点与成果。当前对圆柱绕流的研究主要集中在圆柱的受力特性、圆柱尾流的流动情况、漩涡的脱落和边界层的相互作用等方面, 涵盖不同雷诺数、不同圆柱数量和不同间距比条件下圆柱尾流的流场特性。

3) 研究的局限性。现有的圆柱绕流研究大多聚焦于尾流区域, 很少对上游减速流区域和两侧移位流区域进行研究。多数流体结构在靠近尾流区域处形成之后便会慢慢衰退, 而这种尾流区域流体结构的形成和衰退情况是由流动状态决定的, 其表现形式取决于流动状态是层流状态、转捩状态还是湍流状态。

在未来的圆柱绕流研究中, 应将关注点聚焦在以下3个方面。

1) 改进数值模拟方法, 并着力开发全新的数值模拟算法, 以此提升其对高雷诺数流动的模拟精度和实际适用性。

2) 针对圆柱绕流存在的多物理场耦合问题, 探寻新的解决办法, 进而为工程应用提供理论层面的保障。

3) 利用人工智能技术开发新的流动控制技术, 实现对流动控制参数的自动调整, 最大程度提升流动控制效果。

### 参考文献:

[1] 张立启. 三维圆柱绕流与涡激振动的行波壁控制方法研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2019.  
ZHANG L Q. Study on Traveling Wave Wall Control Method of Flow Around the Three-Dimensional Cylinder and Vortex Induced Vibration[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2019.

[2] 姜拓. 正型排列四圆柱绕流的数值模拟及其影响因素分析[D]. 北京: 华北电力大学, 2019.  
JIANG T. Numerical Simulation of Flow Around Four Cylinders in a Square Arrangement and Analysis of its Influencing Factors[D]. Beijing: North China Electric Power University, 2019.

[3] 斯兰特科维奇 M M. 圆柱绕流 I -基础(翻译版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2018.

ZDRAVKOVICH M M. Flow Around Circular Machine Cylinders (Vol 1: Fundamentals)[M]. Beijing: China Press, 2018.

[4] 焦树霖, 锤明栋. 达朗贝尔原理[J]. 物理通报, 1957(5): 282-285.  
JIAO S L, ZHONG M D. D' Alembert Principle[J]. Physics Bulletin, 1957(5): 282-285.

[5] MALLOCK H R A. On the Resistance of Air[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1907, 79(530): 262-273.

[6] MALLOCK H R A. Influence of Viscosity on the Stability of the Flow of Fluids[J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1911, 84(573): 482-491.

[7] BENARD H. Formation of Centers of Circulation Behind a Moving Obstacle[J]. Comptes Rendus Academie des Sciences, 1908, 147: 839-842.

[8] PRANDTL L S H. Boundary Layer Theory[J]. Verhandlungen Des Dirlten Internationalen Malhematiker-Kongresses, 1904(6): 484-491.

[9] 高敏. 亚临界区风场中三维圆柱绕流的数值模拟研究[D]. 辽宁大连: 大连理工大学, 2018.  
GAO M. Numerical Simulation of Three-Dimensional Cylindrical Flow in Subcritical Area[D]. Dalian, Liaoning: Dalian University of Technology, 2018.

[10] BÉNARD H. A Cinematographic Study of Eddies and Ripples Produced by Towed Obstacles[J]. Comptes Rendus Academie des Sciences, 1908, 147: 970-972.

[11] VON K T. Uber Den Mechanismus Des Flussigkeits-Und Luftwiderstandes[J]. Physikalische Zeitschrift, 1912: 49-59.

[12] ИДЕЛЬЧИК И Е. Справочник по Гидравлическим Сопротивлениям (3-е Издание)[M]. Москва: Машиностроение, 1992.

[13] 薛旆云. 桥墩密布的城市河道壅水高度及防洪对策研究[D]. 山东青岛: 中国海洋大学, 2014.  
XUE Y Y. The Research of Backwater Height and Flood Control Countermeasure for Urban River with High Pier Density[D]. Qingdao, Shandong: Ocean University of China, 2014.

[14] THOM A. The Flow Past Circular Cylinders at Low Speeds[C]//The Royal Society of London. 1933.

[15] TANEDA S. Experimental Investigation of the Wakes Behind Cylinders and Plates at Low Reynolds Numbers[J]. Journal of the Physical Society of Japan, 1956, 11(3): 302-307.

- [16]ROSHKO A. On the Development of Turbulent Wakes from Vortex Streets[R]. NACA Technical Report 1191, 1954.
- [17]ACHENBACH E. Distribution of Local Pressure and Skin Friction Around a Circular Cylinder in Cross-Flow up to  $Re=5\times 10^6$ [J]. Journal of fluid Mechanics, 1968, 34(4): 625-639.
- [18]FALTINSEN O. Sea Loads on Ships and Offshore Structures[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
- [19]MADELEINE C J D. Circular Cylinder Wake Configurations: A Flow Visualization Survey[J]. Applied Mechanics Reviews, 1991, 6(44): 255-305.
- [20]CANTWELL B, COLES D. An Experimental Study of Entrainment and Transport in the Turbulent Near Wake of a Circular Cylinder[J]. Journal of fluid mechanics, 1983, 136: 321-374.
- [21]FUJISAWA N, TANAHASHI S, SRINIVAS K. Evaluation of Pressure Field and Fluid Forces on a Circular Cylinder with and Without Rotational Oscillation Using Velocity Data from PIV Measurement[J]. Measurement Science & Technology, 2005, 16(4): 989.
- [22]GOHARZADEH A, MOLKI A. Measurement of Fluid Velocity Development Behind a Circular Cylinder Using Particle Image Velocimetry (PIV)[J]. European Journal of Physics, 2014, 36(1): 015001.
- [23]JULIO S. An Investigation of the Near Wake of a Circular Cylinder Using a Video-Based Digital Cross-Correlation Particle Image Velocimetry Technique[J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 1996, 12(2): 221-233.
- [24]李玲, 李玉梁, 祁雪春, 等. 浅水层圆柱绕流流动模式的试验研究[J]. 自然科学进展, 2000(6): 76-81.  
LI L, LI Y L, QI X C, et al. Experimental Research on the Flow Patterns of Flow Around a Circular Cylinder in the Shallow Water Layer[J]. Advances in Natural Sciences, 2000(6): 76-81.
- [25]涂程旭, 王昊利, 林建忠. 圆柱绕流的流场特性及涡脱落规律研究[J]. 中国计量学院学报, 2008(2): 98-102.  
TU C X, WANG H L, LIN J Z. Experimental Research on the Now Characteristics and Vortex Shedding in the Flow Around a Circular Cylinder[J]. Journal of China University of Metrology, 2008(2): 98-102.
- [26]余英俊, 胡晓, 石小涛, 等. 基于简易 PIV 的圆柱绕流压力场重构[J]. 长江科学院院报, 2019, 36(6): 42-48.  
YU Y J, HU X, SHI X T, et al. Measurement of Transient Pressure Field Based on Simple Particle Image Velocimetry[J]. Journal of Changjiang River Scientific Research Institute, 2019, 36(6): 42-48.
- [27]江建华, 鲍锋. 基于 POD 方法开缝圆柱绕流流场的研究[J]. 气体物理, 2017, 2(2): 28-36.  
JIANG J H, BAO F. POD Analysis of a Slit Circular Cylinder Near Wake[J]. Physics of Gases, 2017, 2(2): 28-36.
- [28]BRAZA M, PERRIN R, HOARAU Y. Turbulence Properties in the Cylinder Wake at High Reynolds Numbers[J]. Journal of Fluids and Structures, 2006(22): 757-771.
- [29]DOBROSELSKY K G. Studying the Flow Around a Cylinder in the Critical Region by the PIV Method[C]//Journal of Physics: Conference Series. 2018.
- [30]PERRIN R, BRAZA M, CID E, et al. Coherent and Turbulent Process Analysis in the Flow Past a Circular Cylinder at High Reynolds Number[J]. Journal of Fluids and Structures, 2008, 24(8): 1313-1325.
- [31]王勇, 郝南松, 耿子海, 等. 基于时间解析 PIV 的圆柱绕流尾迹特性研究[J]. 试验流体力学, 2018, 32(1): 64-70.  
WANG Y, HAO N S, GENG Z H, et al. Measurements of Circular Cylinder's Wake Using Time-Resolved PIV[J]. Journal of Experiments in Fluid Mechanics, 2018, 32(1): 64-70.
- [32]KINOSHITA H, KANEDA S, FUJII T, et al. Three-Dimensional Measurement and Visualization of Internal Flow of a Moving Droplet Using Confocal Micro-PIV[J]. Lab on a Chip, 2007, 7(3): 338-346.
- [33]JUNG J, KUO C J, PELES Y, et al. The Flow Field Around a Micropillar Confined in a Microchannel[J]. International Journal of Heat and Fluid Flow, 2012, 36: 118-132.
- [34]李济超, 季璨, 吕明明, 等. 微通道内单柱绕流特性的 Micro-PIV 试验研究[J]. 化工学报, 2020, 71(4): 1597-1608.  
LI J C, JI C, LU M M, et al. Experimental Study on Characteristics of Flow Around Single Cylinder in Microchannel Based on Micro-PIV[J]. CIESC Journal, 2020, 71(4): 1597-1608.
- [35]陶梦琦, 刘美红, 康宇驰. 基于 Micro-PIV 的微通道内流体绕流单微圆柱和并联双微圆柱流场特性[J]. 化工进展, 2023, 42(6): 2836-2844.  
TAO M Q, LIU M H, KANG Y C. Analysis of Fluid Across a Single Cylinder and Two Parallel Cylinders in

- a Micro Flow Channel by Micro-PIV[J]. Chemical Industry and Engineering Progress, 2023, 42(6): 2836-2844.
- [36] CANUTO D, TAIRA K. Two-Dimensional Compressible Viscous Flow Around a Circular Cylinder[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2015, 785: 349-371.
- [37] OHTA T, SHIRAHATA F. Friction Drag Model for Axial Turbulent Flow Along the Surface of a Circular Cylinder Based on the Universal Characteristics of Wall Turbulence[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2024, 1000: A35.
- [38] 闵强利. 低雷诺数卡门涡街数值模拟[J]. 四川兵工学报, 2009, 30(11): 81-83.  
MIN Q L. Numerical Simulation of Low-Reynolds-Number Karman Vortex Street[J]. Journal of Ordnance Equipment Engineering, 2009, 30(11): 81-83.
- [39] 詹昊, 李万平, 方秦汉, 等. 不同雷诺数下圆柱绕流仿真计算[J]. 武汉理工大学学报, 2008, 30(12): 129-132.  
ZHAN H, LI W P, FANG Q H, et al. Numerical Simulation of the Flow Around a Circular Cylinder at Varies Reynolds Number[J]. Journal of Wuhan University of Technology, 2008, 30(12): 129-132.
- [40] SPALART P R, JOU W H, STRETTLETS M, et al. Comments on the Feasibility of LES for Wings and on the Hybrid RANS/LES Approach[R]. 1997.
- [41] PARNAUDEAU P, CARLIER J, HEITZ D, et al. Experimental and Numerical Studies of the Flow Over a Circular Cylinder at Reynolds Number 3 900[J]. Physics of Fluids, 2008, 20(8): 287-299.
- [42] PALKIN E, MULLYADZHANOV R, HADŽIABDIĆ M, et al. Scrutinizing URANS in Shedding Flows: the Case of Cylinder in Cross-Flow in the Subcritical Regime[J]. Flow, Turbulence and Combustion, 2016, 97(4): 1017-1046.
- [43] 李燕玲, 苏中地. 高雷诺数下单圆柱绕流的DES三维数值模拟[J]. 中国计量学院学报, 2013, 24(4): 364-369.  
LI Y L, SU Z D. 3D Numerical Simulation of Flow over a Circular Cylinder at High Reynolds Numbers Using DES Method[J]. Journal of China University of Metrology, 2013, 24(4): 364-369.
- [44] 战庆亮, 周志勇, 葛耀君.  $Re=3\ 900$  圆柱绕流的三维大涡模拟[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2015, 47(12): 75-79.  
ZHAN Q L, ZHOU Z Y, GE Y J. 3-Dimensional Large Eddy Simulation of Circular Cylinder at  $Re=3\ 900$ [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2015, 47(12): 75-79.
- [45] 黄技, 吕鸿冠, 林灿彬, 等. 基于 Fluent 的不同雷诺系数下二元圆柱绕流的研究[J]. 广东海洋大学学报, 2015(4): 81-86.  
HUANG J, LU H G, LIN C B, et al. Study on Two-Dimensional Around Acircular Cylinder Flow Reynolds Coefficient Based on Fluent[J]. Journal of Guangdong Ocean University, 2015(4): 81-86.
- [46] 韩晨健, 刘在良, 刘二朋, 等. 粗糙度与间隙比同步作用下的圆柱绕流数值模拟[J]. 船舶工程, 2023, 45(3): 181-187.  
HAN C J, LIU Z L, LIU E P, et al. Numerical Simulation of Flow Around Rough Cylinder Near Wall Under Subcritical Reynolds Number[J]. Ship Engineering, 2023, 45(3): 181-187.
- [47] 涂慧玲, 季梦, 韩盼盼, 等. 亚临界雷诺数下圆柱绕流尾流特征数值模拟[J]. 船舶工程, 2025, 47(2): 138-145.  
TU H L, JI M, HAN P P, et al. Numerical Simulation of Wake Characteristics Around a Circular Cylinder at Subcritical Reynolds Number[J]. Ship Engineering, 2025, 47(2): 138-145.
- [48] ZHAO M, KAJA K, XIANG Y, et al. Vortex-Induced Vibration (VIV) of a Circular Cylinder in Combined Steady and Oscillatory Flow[J]. Ocean Engineering, 2013, 73: 83-95.
- [49] 吴晓笛, 刘华坪, 陈浮. 基于浸入边界-多松弛时间格子玻尔兹曼通量求解法的流固耦合算法研究[J]. 物理学报, 2017, 66(22): 252-265.  
WU X D, LIU H P, CHEN F. A method Combined Immersed Boundary with Multi-Relaxation-Time Lattice Boltzmann Flux Solver for Fluid-Structure Interaction[J]. Acta Physica Sinica, 2017, 66(22): 252-265.
- [50] WANG C, TANG H, DUAN F, et al. Control of Wakes and Vortex-Induced Vibrations of a Single Circular Cylinder Using Synthetic Jets[J]. Journal of Fluids and Structures, 2016, 60: 160-179.
- [51] ZHU H, XU H, LIU B, et al. Numerical Investigation of the Vortex-Induced Vibration of a Circular Cylinder in Oscillatory Flow[J]. Ocean Engineering, 2024, 310: 118666.
- [52] 刘正浩. 考虑黏性作用的波、流与柱式结构物相互作用数值模拟与水动力特性研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2021.  
LIU Z H. Numerical Simulation and Hydrodynamic Research on the Interaction Between Waves, Currents

- and Columnar Cylinders Considering Ciscous Effects[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2021.
- [53] 斯兰特科维奇 M M. 圆柱绕流 II-应用(翻译版)[M]. 北京: 机械工业出版社, 2019.  
ZDRAVKOVICH M M. Flow Around Circular Cylinders (Vol 1: Applications)[M]. Beijing: China Machine Press, 2019.
- [54] ZDRAVKOVICH M M. Flow Induced Oscillations of Two Interfering Circular Cylinders[J]. Journal of Sound and Vibration, 1985, 101(4):511-521.
- [55] IGARASHI T. Characteristics of the Flow Around Two Circular Cylinders Arranged in Tandem: 1st Report[J]. JSME International Journal (Series B), 1981, 24(188): 323-331.
- [56] SUMNER D, WONG S S T, PRICE S J, et al. Fluid Behaviour of Side-by-Side Circular Cylinders in Steady Cross-Flow[J]. Journal of Fluids and Structures, 1999, 13(3): 309-338.
- [57] 周杰, 邹帅, 喜冠南. 不同间距比下串列双圆柱绕流的可视化试验[J]. 机械设计与制造, 2017(7): 19-21.  
ZHOU J, ZOU S, XI G N. Visualization Experimenton the Flow Characteristicsof In-Line Cylindersfor DifferentSpacings[J]. Machinery Design & Manufacture, 2017(7): 19-21.
- [58] ZHANG C, KANG Z, XIONG Y, et al. Experimental Investigation on Coupled Cross-Flow and in-Line Vortex-Induced Vibration Responses of Two Staggered Circular Cylinders[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, 2021, 235(1): 288-300.
- [59] WILLIAMSON C H K. Evolution of a Single Wake Behind a Pair of Bluff Bodies[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1985, 159(1): 1-18.
- [60] BEARMAN P W, WADCOCK A J. The Interaction Between a Pair of Circular Cylinders Normal to a Stream[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1973, 61(3): 499-511.
- [61] XU G, ZHOU Y. Strouhal Numbers in the Wake of Two Inline Cylinders[J]. Experiments in Fluids, 2004, 37(2): 248-256.
- [62] QIN B, ALAM M M, ZHOU Y. Two Tandem Cylinders of Different Diameters in Cross-Flow: Flow-Induced Vibration[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2017, 829: 621-658.
- [63] WANG L J, ALAM M M, ZHOU Y. Two Tandem Cylinders of Different Diameters in Cross-Flow: Effect of an Upstream Cylinder on Wake Dynamics[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2018, 836: 5-42.
- [64] ALAM M M, ELHIMER M, WANG L, et al. Vortex Shedding from Tandem Cylinders[J]. Experiments in Fluids, 2018, 59(3): 60.
- [65] 王智辉. 水流数值模拟中群桩阻力系数研究[D]. 南京: 河海大学, 2005.  
WANG Z H. Research of the Resistance Coefficient of Pile Groups in the Current Numerical Simulation[D]. Nanjing: Hohai University, 2005.
- [66] 王龙军. 非等直径串列双圆柱绕流特性研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2018.  
WANG L J. Fluid Dynamics of Two Tandem Cylinders with Different Diameters[D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2018.
- [67] SCHEWE G, VAN HINSBERG N P, JACOBS M. Investigation of the Steady and Unsteady Forces Acting on a Pair of Circular Cylinders in Crossflow up to Ultra-High Reynolds Numbers[J]. Experiments in Fluids, 2021, 62(8): 176.
- [68] JENKINS L, KHORRAMI M, CHOUDHARI M, et al. Characterization of Unsteady Flow Structures Around Tandem Cylinders for Component Interaction Studies in Airframe Noise[C]//11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference. 2005.
- [69] LI L, LIU P, XING Y, et al. Experimental Investigation on the Noise Reduction Method of Helical Cables for a Circular Cylinder and Tandem Cylinders[J]. Applied Acoustics, 2019, 152: 79-87.
- [70] 王大庆, 仝帆, 冯和英, 等. 节径凸起结构对串列双圆柱干涉噪声的影响[J]. 航空动力学报, 2023, 38(1): 160-172.  
WANG D Q, TONG F, FENG H Y, et al. Influence of Pitch Diameter Protruding Structure on Interference Noise of Tandem Double Cylinders[J]. Journal of Aerospace Power, 2023, 38(1): 160-172.
- [71] 费宝玲, 郑庭辉, 杨骏六. 数值分析串列双圆柱绕流[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2007, 33(2): 376-380.  
FEI B L, ZHENG T H, YANG J L. Numerical Simulation of Flow Over Two Tandem Cylinders[J]. Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition), 2007, 33(2): 376-380.
- [72] XU Y, LIU Y, XIA Y, et al. Lattice-Boltzmann Simulation of Two-Dimensional Flow Over Two Vibrating Side-by-Side Circular Cylinders[J]. Physical Review E-Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2008, 78(4): 046314.
- [73] 田启龙, 王嘉松. 双圆柱绕流水动力分析的离散涡数值模拟[J]. 中国海洋平台, 2017, 32(3): 51-57.

- TIAN Q L, WANG J S. Numerical Simulation of Flow Around Two Cylinders with Discrete Vortex[J]. China Offshore Platform, 2017, 32(3): 51-57.
- [74] 崔雪扬, 曹博超, 徐弘一, 等. 串列双圆柱绕流问题数值模拟的多尺度分析[J]. 复旦学报(自然科学版), 2017, 56(3): 116-124.
- CUI X Y, CAO B C, XU H Y, et al. Multi-Scale Analysis of Numerical Simulation About Flow Around Double Cylinders in Tandem[J]. Journal of Fudan University (Natural Science), 2017, 56(3): 116-124.
- [75] 王凯鹏, 赵西增. 不同来流条件下双圆柱绕流的数值模拟[C]//第十八届中国海洋(岸)工程学术讨论会. 2017.
- WANG K P, ZHAO X Z. Numerical Simulation of Double-Cylinder Flow Under Different Incoming Flow Conditions[C]//18th China Ocean (Coastal) Engineering Academic Symposium. 2017.
- [76] 涂佳黄, 黄林茜, 何永康, 等. 低雷诺数下串列布置双圆柱涡激振动特性研究[J]. 力学学报, 2022, 54(1): 68-82.
- TU J H, HUANG L Q, HE Y K, et al. Study on The Vortex-Induced Vibration Characteristics of two Tandem Cylinders at Low Reynolds Number[J]. Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics, 2022, 54(1): 68-82.
- [77] SKONECKI G M, BUICK J M. Numerical Study of flow Around Two Circular Cylinders in Tandem, Side-by-Side and Staggered Arrangements[J]. Fluids, 2023, 8(5): 148.
- [78] ZHAO M, CHENG L, TENG B, et al. Hydrodynamic Forces on Dual Cylinders of Different Diameters in Steady Currents[J]. Journal of Fluids and Structures, 2007, 23(1): 59-83.
- [79] RAHMANIAN M, CHENG L, ZHAO M, et al. Vortex-Induced Vibration of Two Side-by-Side Circular Cylinders of Different Diameters in Close Proximity in Steady Flow[C]//International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering. 2012.
- [80] SHENOI R R, MANELIL N P, SUNDARARAJAN T, et al. Effect of Diameter Ratio on Unsteady Flow Past Two Side-by-Side Cylinders at  $Re=2000$ [C]//AIP Conference Proceedings. 2020.
- [81] 张艺鸣, 罗良, 陈威, 等. 不等直径并列双圆柱绕流数值模拟研究[J]. 舰船科学技术, 2021, 43(9): 48-52.
- ZHANG Y M, LUO L, CHEN W, et al. Numerical Simulation of Flow Around Two Parallel Cylinders with Unequal Diameters[J]. Ship Science and Technology, 2021, 43(9): 48-52.
- [82] 杨群, 刘庆宽, 刘小兵. 串列三圆柱绕流的时均压力分布与气动力[J]. 振动测试与诊断, 2019, 39(5): 1011-1015.
- YANG Q, LIU Q K, LIU X B. Time Averaged Pressure Distribution and Aerodynamic Force of Flow Around Three Circular Cylinders in Tandem Arrangement[J]. Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis, 2019, 39(5): 1011-1015.
- [83] POURYOUSSEFI S G, MIRZAEI M, POURYOUSSEFI S M H. Force Coefficients and Strouhal Numbers of Three Circular Cylinders Subjected to a Cross-Flow[J]. Archive of Applied Mechanics, 2011, 81(11): 1725-1741.
- [84] BANSAL M S, YARUSEVYCH S. Experimental Study of Flow Through a Cluster of Three Equally Spaced Cylinders[J]. Experimental Thermal and Fluid Science, 2017, 80: 203-217.
- [85] 唐炼蓉, 彭婧华, 喜冠南. 过渡流下异管径三圆柱绕流的可视化试验[J]. 机械设计与制造, 2021(7): 98-100.
- TANG L R, PENG J H, XI G N. Visualization Experiment on the Flow Passed Three Circular Cylinders with Different Diameters in Transitional Flow[J]. Machinery Design & Manufacture, 2021(7): 98-100.
- [86] 李勇, 叶剑海, 王成会, 等. 非规则三角排列的三圆柱噪声特性与控制[J]. 航空学报, 2024, 45(23): 45-63.
- LI Y, YE J H, WANG C H, et al. Characterization and Control of Three-Cylinder Noise in Irregular Triangular Arrangement[J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2024, 45(23): 45-63.
- [87] SAYERS A T. Flow Interference Between Four Equispaced Cylinders when Subjected to a Cross Flow[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1988, 31(1): 9-28.
- [88] SAYERS A T. Vortex Shedding from Groups of Three and Four Equispaced Cylinders Situated in a Cross Flow[J]. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 1990, 34(2): 213-221.
- [89] LIU M, XIAO L, KOU Y, et al. Experimental and Numerical Studies on the Excitation Loads and Vortex Structures of Four Circular Section Cylinders in a Square Configuration[J]. Ships and Offshore Structures, Taylor & Francis, 2016, 11(7): 734-746.

(下转第 76 页)

- [13] 李佳幸, 高传, 隆云鹏, 等. 柴油车尾气后处理关键材料研究进展[J]. 科学通报, 2025, 70(14): 2033-2043.  
LI J X, GAO Z, LONG Y P, et al. Research Status and Prospects on Key Materials for Diesel Vehicle Exhaust Aftertreatment System[J]. Chinese Science Bulletin, 2025, 70(14): 2033-2043.
- [14] 李世用. 船用柴油机 Urea-SCR 系统仿真与优化设计[D]. 辽宁大连: 大连海事大学, 2012.  
LI S Y. The Simulation and Optimization Design of Marine Diesel Engine Urea-SCR System[D]. Dalian, Liaoning: Dalian Maritime University, 2012.
- [15] 陈海江. MAN 6S50MC-C 型柴油机 SCR 催化反应器结构尺寸设计与性能优化[D]. 辽宁大连: 大连海事大学, 2013.  
CHEN J H. Structural Dimensions Design and Performance Optimization of MAN 6S50MC-C Diesel Engine SCR Catalytic Reactor[D]. Dalian, Liaoning: Dalian Maritime University, 2013.
- [16] ZHANG C, LIU G, ZHANG X, et al. A Partitioned Dynamic Ammonia Injection Strategy Based on Real-Time  $\text{NO}_x$  Flux Distribution Characteristics in an SCR System[J]. Fuel, 2025, 381: 133711.
- [17] SUN Q, YANG X, WU J, et al. A New Proportional-Integral-Derivative Automatic Control Method Complemented by Computational Fluid Dynamics for Gas Concentration in the Tunneling Face[J]. Arabian Journal for Science and Engineering, 2025: 1-16.
- [18] SHI J, ZHU Y, PENG H, et al. Modeling and Simulation of Marine SCR System Based on Modelica[J]. International Journal of Engine Research, 2023, 24(3): 1016-1026.
- [19] 新华社. 绿色引领 科技赋能——各界人士共话航运业高质量发展新图景 [EB/OL]. [2025-03-20]. [https://www.gov.cn/xinwen/2021-07/11/content\\_5624195.htm](https://www.gov.cn/xinwen/2021-07/11/content_5624195.htm).  
Xinhua News Agency. Green Leadership, Technology Empowerment-Stakeholders Discuss New Vision for High-Quality Development in the Shipping Industry [EB/OL]. [2025-03-20]. [https://www.gov.cn/xinwen/2021-07/11/content\\_5624195.htm](https://www.gov.cn/xinwen/2021-07/11/content_5624195.htm).
- [20] 生态环境部. 中国移动源环境管理年报 (2024 年) [EB/OL]. [2025-3-26]. [https://www.mee.gov.cn/hjzl/sthjzk/ydyhjgl/202503/t20250326\\_1104757.shtml](https://www.mee.gov.cn/hjzl/sthjzk/ydyhjgl/202503/t20250326_1104757.shtml).  
Ministry of Ecology and Environment of the People's Republic of China. Annual Report on Environmental Management of Mobile Sources in China (2024) [EB/OL]. [2025-3-26]. [https://www.mee.gov.cn/hjzl/sthjzk/ydyhjgl/202503/t20250326\\_1104757.shtml](https://www.mee.gov.cn/hjzl/sthjzk/ydyhjgl/202503/t20250326_1104757.shtml).
- =====
- (上接第 19 页)
- [90] 李景银, LAM K, CHAN K T, 等. 绕正方形排列的顺排的四圆柱的流动研究[J]. 工程热物理学报, 2004, 25(1): 59-62.  
LI J Y, LAM K, CHAN K T, et al. Study on the Cross Flow Around Four Cylinders in an In-Line Square Arrangement at Low Reynolds Numbers[J]. Journal of Engineering Thermophysics, 2004, 25(1): 59-62.
- [91] 张爱社, 张陵. 等边布置三圆柱绕流的数值分析[J]. 应用力学学报, 2003(1): 31-36.  
ZHANG A S, ZHANG L. Numerical Analysis of Three Circular Cylinders Arranged in an Equilateral Configuration Undergoing Flow[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2003(1): 31-36.
- [92] 张力, 及春宁, 邢国源. 低雷诺数条件下并列三圆柱绕流的尾流模式和水动力系数研究[J]. 水动力学研究与进展: A 辑, 2017, 32(3): 263-272.  
ZHANG L, JI C N, XING G Y. Investigation on Near-Wake Patterns and Hydrodynamic Coefficients of Flow Around Three Side-by-Side Cylinders with a Low Reynolds Number[J]. Chinese Journal of Hydrodynamics, 2017, 32(3): 263-272.
- [93] 高文文, 张伟. 正方形排列四圆柱绕流的数值模拟[J]. 天津城建大学学报, 2015, 21(3): 205-209.  
GAO W W, ZHANG W. Numerical Simulation of Cross-Flow Around Four Cylinders in a Square Configuration[J]. Journal of Tianjin Chengjian University, 2015, 21(3): 205-209.
- [94] ZHAO M, CHENG L. Numerical Simulation of Vortex-Induced Vibration of Four Circular Cylinders in a Square Configuration[J]. Journal of Fluids and Structures, 2012, 31: 125-140.
- [95] LAM K, GONG W Q, SO R M C. Numerical Simulation of Cross-Flow Around Four Cylinders in an In-Line Square Configuration[J]. Journal of Fluids and Structures, 2008, 24(1): 34-57.
- [96] 朱润野, 刁明军, 刘伟. 低雷诺数下五圆柱绕流的数值模拟研究[J]. 西南民族大学学报(自然科学版), 2015, 41(6): 758-766.  
ZHU R Y, DI M J, LIU W. Numerical Investigation of Now Past Five Circular Cylinders at Low Reynolds Number[J]. Journal of Southwest Minzu University (Natural Science Edition), 2015, 41(6): 758-766.