

水润滑轴承的光滑粒子流体动力学方法仿真模拟

徐 丹¹, 黄日宁², 周圣兵³, 罗传富^{1,4,*}, 王 晔²

(1. 极端工况高分子材料实验室, 中国科学院长春应用化学研究所, 长春 130022; 2. 中国船舶及海洋工程设计研究院, 上海 200011; 3. 中国人民解放军 91412 部队, 广东湛江 524000; 4. 中国科学技术大学, 应用化学与工程学院, 合肥 230026)

摘 要: [目的]为研究水润滑轴承中的水膜形成机理和瞬态过程。[方法]传统的二维雷诺方程仅能进行近似和稳态模拟计算, 针对水润滑轴承中超薄水膜问题提出增厚近似纳维-斯托克斯 (N-S) 方程, 使用光滑粒子动力学 (SPH) 求解增厚近似 N-S 方程, 对水润滑轴承模型进行仿真; 研究不同转速和偏心率 (水膜厚度) 下水润滑轴承中水膜流场、压力演化的动态过程, 初步讨论水润滑轴承中水膜建立的机制。[结果]结果表明: 增厚近似 N-S 方程的光滑粒子动力学能对液膜建立的过程进行瞬态仿真; 在偏心率较大的初始启动过程中, 存在较大的压力波动甚至部分空洞的现象; 光滑粒子流体动力学在对压强的计算上和传统雷诺方程相比仍存在一定偏差, 但具有巨大改进潜力。[结论]研究成果为理解水润滑型轴承中水膜的形成机理和瞬态过程提供理论参考。

关键词: 水润滑轴承; 光滑粒子动力学 (SPH); 瞬态过程

中图分类号: U671.99 **文献标志码:** A **【DOI】** 10.13788/j.cnki.cbge.2026.09.08

Smoothed Particle Hydrodynamics Simulations of Water Lubricated Bearings

XU Dan¹, HUANG Rining², ZHOU Shengbing³, LUO Chuanfu^{1,4,*}, WANG Ye²

(1. Laboratory of Polymer Materials for Extreme Conditions, Changchun Institute of Applied Chemistry, Chinese Academy of Sciences, Changchun 130022, China; 2. Marine Design and Research Institute of China, Shanghai 200011, China; 3. Unit 91412, Zhanjiang 524000, Guangdong, China; 4. School of Applied Chemistry and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract: [Purpose] To investigate the formation mechanism and transient process of the water film in water-lubricated bearings. [Method] The traditional two-dimensional (2D) Reynolds equation is limited to approximate and static simulations. To address the challenge of ultra-thin water films in water-lubricated bearings, a thickened approximation of the Navier-Stokes (N-S) equations is proposed. The smoothed particle hydrodynamics (SPH) method is employed to develop a numerical solver for these equations and to simulate a bearing model. The dynamic evolution of the flow field and pressure distribution is investigated under various rotational speeds and eccentricities. In addition, the mechanism of water film formation is preliminarily explored. [Result] The results indicate that the SPH method, applied to the thickened approximation N-S equations, can effectively simulate the transient process of liquid film formation. During the initial startup phase under high eccentricity, significant pressure fluctuations and even partial cavitation are observed. While the pressure calculations from the SPH model show certain deviations when compared to those from the traditional Reynolds equation, they demonstrate significant potential for improvement. [Conclusion] The findings provide a theoretical reference for understanding the formation mechanism and transient processes of the water film in water-lubricated bearings.

收稿日期: 2025-08-13; 修回日期: 2025-09-25; 录用日期: 2025-10-31

作者简介: 徐 丹 (1990—), 女, 副研究员。研究方向: 有限元仿真及分子动力学模拟。

通信作者: 罗传富 (1979—), 男, 研究员。研究方向: 有限元仿真及分子动力学模拟。E-mail: luocf@ciac.ac.cn

Key words: water lubricated bearing; smoothed particle hydrodynamics (SPH); transient flow

0 引言

水润滑轴承以水为润滑剂,从根本上消除了润滑油泄漏对海洋环境的污染风险,完全符合防污染公约要求。水具有不可燃性,极大地提升了船舶的运行安全性,避免了油润滑轴承可能引发的火灾隐患。此外,海水作为取之不尽的免费润滑介质,显著降低了船舶的运营成本,同时其高比热容的特性也为轴承系统提供了良好的冷却效果^[1-3]。

水润滑轴承的应用亦面临诸多挑战。核心问题在于水的黏度远低于传统润滑油,导致在相同工况下其流体动压膜的承载能力相对较弱。这使得轴承在启动、停机或低速重载等工况下,极易因液膜破裂而进入边界润滑甚至干摩擦状态,从而引发严重的磨损^[4-8]。海水的强腐蚀性要求轴承材料必须具备优异的耐腐蚀和耐磨性能,这通常需要采用昂贵的工程塑料(如UHMWPE、酚醛树脂)、陶瓷或特种不锈钢,增加了制造成本^[9]。此外,水膜对泥沙等悬浮杂质敏感,易造成磨粒磨损,且其较低的阻尼特性也可能使轴系更容易产生振动与噪声^[10-11]。

当前水润滑轴承的研究热点主要集中于4个方面。1) 新型复合材料研发:开发兼具低摩擦、高耐磨、耐腐蚀及优良自润滑性能的复合材料是研究的核心。通过向高分子基体中添加纤维、石墨或陶瓷颗粒等增强相,以优化材料的综合力学与摩擦学性能^[12]; 2) 先进润滑理论建模:传统的雷诺方程已难以精确描述水润滑轴承在复杂工况下的行为。当前研究趋势是建立更完善的热弹性流体动力学(Thermo-Elasto-Hydrodynamic, TEHD)模型^[13],综合考虑压力、弹性变形、温度场及空化效应的耦合作用,以更准确地预测轴承性能。3) 高精度数值仿真:随着计算能力的提升,采用计算流体动力学(Computational Fluid Dynamics, CFD)与有限元法(Finite Element Method, FEM)耦合的多物理场仿真成为主流^[14-15]。特别是对于启动、冲击等瞬态过程,基于粒子方法,如光滑粒子流体动力学(Smoothed-Particle Hydrodynamics, SPH)的无网格仿真技术^[16],因其能处理自由表面和大变形问题,正成为揭示水膜形成与失稳机理的有力工具。4) 结构优化与状态监测:通过优化轴承内表面的水槽结构设计,改善水膜的压力分布和杂质排出效率。同时,集成振动、声发射及温度传感器的智能状态监测系统,用于实时评估轴承的润滑状态和健康水平,实现预测性维护^[17-18]。

传统二维雷诺方程虽然具有形式简单和计算效率高的优点,但存在水膜连续和密度不变的前提假设,因此只适用于稳态工况分析,无法对实际工况

中对磨损有重要影响的瞬态工况进行分析。而SPH方法将连续化的密度场抽象为离散粒子并进行动力学积分模拟,能够研究水膜断裂等传统方法很难处理的瞬态问题。此外SPH方法在编程上比较容易实现大规模并行,近年来SPH方法的代码在大规模并行计算或图形处理器(Graphics Processing Unit, GPU)硬件加速方面逐步成熟,部分商业化仿真软件已经包含SPH仿真模块。不过由于水润滑轴承中水膜非常薄而轴径非常大,如果简单地使用SPH方法来仿真水润滑轴承会面临所需粒子数远超当前计算机处理能力的技术难题,在文献中目前尚未发现使用SPH方法研究水润滑轴承的工作。因此,虽然SPH方法具有模拟水润滑轴承瞬态工况的潜力,但亟须解决超薄水膜和超大轴径带来的仿真粒子数过于庞大的技术难题。

本文主要关注水润滑轴承的仿真方法探索,运用光滑粒子流体动力学方法探讨水润滑轴承中水膜形成机理和瞬态过程,针对超薄水膜提出了增厚近似纳维-斯托克斯(Navier-Stokes, NS)方程的SPH方法以解决仿真粒子数过于庞大的技术难题,并与传统二维雷诺方程的结果进行了对比。

1 水润滑轴承的工作原理及理论计算方法比较

1.1 水润滑轴承工作原理

水润滑轴承的运行基于流体动压润滑原理^[19-21]。在运行过程中,旋转主轴与轴承内表面构成一对摩擦副。由于轴的偏心旋转,二者之间形成了一个楔形收敛间隙。旋转运动将润滑介质(水)剪切带入该间隙,从而产生动压效应,形成具有承载能力的动压流体膜。该流体膜将轴与轴承表面完全隔离,避免了固体间的直接接触,进而实现了低摩擦和低磨损的运行状态。

为阐明动压润滑机理,可将其简化为相对运动的平板模型。如图1(a)所示,当下板B固定,上板A以速度 V 平移时,若两板间充满层流流体,其速度剖面将呈线性分布。根据牛顿黏性定律,流体内部仅存在剪切流动,沿流动方向的压力梯度为零,因此无法产生额外的流体压力。在此状态下,流体膜不具备承载能力,无法抵抗施加于板A的外部载荷 F 。

然而,当两板形成收敛倾斜间隙时见图1(b),情况则截然不同。为满足流量连续性条件,流体在间隙入口处(截面a-a)的速度剖面较为平缓,而在出口处(截面c-c)则变得陡峭。这种速度剖面的变化意味着沿流动方向存在正的压力梯度,从而在间隙内建立起一个抛物线形的压力分布。该压力分布所产生的合力即为流体动压承载力,能够有效平衡外

部载荷 F , 使上板 A 保持悬浮。

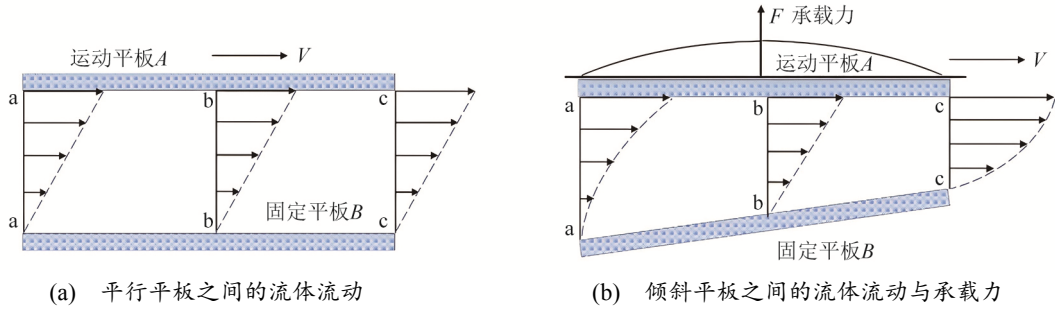


图1 液体动压润滑承载机理

Fig. 1 Hydrodynamic Lubrication Load-Carrying Mechanism

轴承从静止到稳定运行的启动过程清晰地展示了水润滑轴承的工作原理。如图2(a)所示, 静止状态下, 轴颈在自重等外部载荷作用下与轴承内表面接触, 自然形成收敛间隙。当轴颈开始旋转时(图2(b)), 水被带入该间隙。在启动初期, 转速较低, 产生的流体动压尚不足以完全平衡外部载荷, 此时轴承处于边界润滑或混合润滑状态, 轴颈在摩擦力驱动下沿轴承内表面爬升。随着转速持续增加(图2(c)), 泵入间隙的水量增多, 动压水膜的压力随之升高, 直至其总承载力足以将轴颈完全托起, 使其与轴承表面被一层稳定的水膜隔开。此时, 轴承进入完全流体动压润滑状态。在此状态下, 摩擦因数显著降低, 摩擦阻力主要来源于流体内部的黏性剪切, 而非固体间的直接接触。

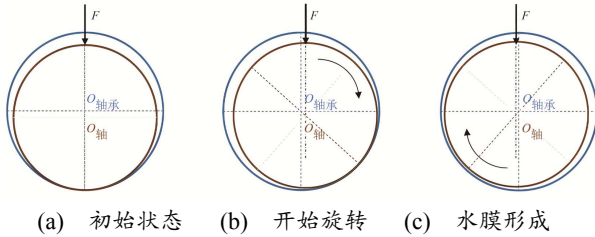


图2 轴颈从静止到稳定旋转过程的位置变化

Fig. 2 Positional Evolution of the Journal from Rest to Steady Rotation

1.2 水润滑基本方程

黏性流体的运动方程N-S方程, 是流体力学中用于描述流体内部黏性效应的基本方程^[22]。在流体润滑领域, 特别是在涉及轴承等机械系统的设计和分析中, 该方程发挥着核心作用。不过由于轴承的特殊结构, 通常使用简化的二维近似方程, 即雷诺方程, 详见1.4小节。二维雷诺方程物理清晰、形式简单、经验参数少, 同时数值求解代码易于编写, 二维问题的求解效率也非常高, 因此在实际工程中得到了广泛的应用。

1.3 水膜厚度方程

水润滑轴承理论的核心在于建立水膜厚度、压

力分布及流速之间的内在联系。其中, 水膜厚度分布是求解轴承内部压力场的先决条件。

在轴承稳态运行工况下, 轴颈与轴承的相对位置保持恒定。若忽略热变形、弹性变形等次要因素, 水膜厚度可视为一个纯几何量, 其分布仅取决于轴与轴承的几何关系。根据稳态工况下的轴承几何关系, 定义以下关键参数:

$$\begin{cases} \epsilon = e/c \\ c = R_{\text{轴承}} - R_{\text{轴}} \end{cases} \quad (1)$$

式中: e 为偏心距, 2圆心间的距离; ϵ 为偏心率, 为无量纲化偏心距; c 为半径间隙; $R_{\text{轴承}}$ 为轴承内表面半径; $R_{\text{轴}}$ 为轴颈半径。

在任意周向角 θ 处的水膜厚度 h_w 是 θ 的函数。通过几何分析, 可推导出膜厚方程, 最终的膜厚为

$$h_w = c(1 + \epsilon \cos \theta) \quad (2)$$

1.4 雷诺方程

雷诺(Reynolds)在N-S方程的基础上, 引入一系列合理的假设, 推导出了适用于描述润滑层流动的雷诺方程。雷诺方程是N-S方程在液压轴承这种特殊工况下的二维近似, 由于其具有合理的物理图像和计算上的高效性, 得到了广泛的应用。描述润滑膜压力分布的经典二维雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h_w^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{h_w^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y} \right) = 6u \frac{dh_w}{dx} \quad (3)$$

式中: μ 为润滑液体的动力黏度; p 为润滑液膜压力; x 为轴承周向方向坐标; y 为轴承轴向方向坐标; h_w 为轴承径向方向液膜厚度; u 为轴颈表面线速度。

该偏微分方程为 p 关于 x 和 y 的椭圆形偏微分方程, 要得到其解析解十分困难。尤其在非线性或复杂边界条件下更是如此。在这些情况下, 数值方法提供了一种途径来近似求解偏微分方程。其中FEM通过将计算域划分为多个小“元素”及其“节点”, 并在每个元素内选择适当的数学函数对物理场(如位移、温度、压力)插值, 将原方程离散化为代数方程组。常见离散化技术包括加权残差法(Galerkin

方法)和基于变分原理(如最小势能原理)。各元素的局部方程经组装形成全局矩阵后,采用直接或迭代求解器计算节点值;最后通过后处理(如计算应力应变、绘图或制作动画)来可视化结果。

1.5 光滑粒子流体动力学 SPH

二维雷诺方程适用于稳态工况,无法描述液压轴承等设备的瞬态动力学;尽管含时三维N-S方程理论上可精确刻画流体动态,但基于网格的数值方法在复杂几何或大变形下易受网格生成与畸变限制。

在此背景下,无网格拉格朗日方法脱颖而出,其中光滑粒子流体动力学(Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH)很具代表性。SPH于20世纪70年代由GINGOLD等^[23]、LUCY^[24]和MONAGHAN^[25]为解决天体物理问题提出将流体连续场离散为携带质量、速度、能量等属性的粒子,并以核函数近似偏微分方程,从而得到一组常微分方程。由于无需预设网格,SPH对大变形、材料断裂和自由表面流动等极端工况具有天然适应性。

传统有限差分、有限体积和有限元方法在稳态润滑仿真中已相当成熟,但对轴承启动时的瞬态液膜生成与演变难以胜任,相关研究匮乏。SPH方法凭借其拉格朗日粒子特性和无需网格的优势,可直接模拟油膜的建立、发展与失稳,为启动性能分析提供理论依据,并已成功应用于溃坝、高速冲击和发动机润滑等领域。其主要挑战在于边界处理复杂、压力振荡及高粒子数带来的计算开销,仍是当前研究热点。

SPH方法的基础是积分插值。根据函数积分表示理论,任意一个连续场函数 $f(r)$ 在空间点 r 处的值可以通过一个核函数 W 的积分来精确表示:

$$\int_{\Omega} f(r') W(r-r', h) dr' \quad (4)$$

式中: Ω 为积分域; h 为定义核函数影响范围的光滑长度; r' 为积分域内邻近点位置。

为了进行数值计算,上述积分被离散化为在所有粒子 j 上的求和:

$$f(r_i) \approx \sum_j f(r_j) W(r_i - r_j, h) \Delta V_j \quad (5)$$

式中: ΔV_j 为粒子 j 所代表的微元体积。

在流体问题中,通常用粒子的质量 m_j 和密度 ρ_j 来表示体积,即 $\Delta V_j = m_j / \rho_j$ 。由此得到SPH的标准插值公式:

$$f(r_i) \approx \sum_j (m_j / \rho_j) f(r_j) W(r_i - r_j, h) \quad (6)$$

任意粒子 i 处的物理量 f 的值,是其周围所有粒子 j 对该点贡献的加权平均,权重由核函数 W 和粒子 j 的物理属性共同决定。

核函数是SPH方法的数学核心,它决定了粒子间相互作用的范围、强度和光滑程度。一个理想的核函数通常需要满足以下4个关键性质。

归一化条件:

$$\int_{\Omega} W(r-r', h) dr' = 1 \quad (7)$$

此条件确保了对常函数的精确插值,即如果场函数 f 处处相等且为某一常数 C ,则其SPH近似值仍为该常数。

狄拉克 δ 函数收敛性:当光滑长度 h 趋近于0时,核函数应收敛于狄拉克 δ 函数,即

$$\lim_{h \rightarrow 0} W(r-r', h) = \delta(r-r') \quad (8)$$

这是SPH插值能够精确还原连续函数的数学基础。

紧支性:当粒子间距离超过某一范围时,核函数值为0,即当

$$W(r-r', h) = 0 \quad |r-r'| > \kappa h \quad (9)$$

式中: κ 为与核函数形状相关的常数(通常为2~3)。

紧支性是SPH方法具有计算效率的关键,意味着每个粒子仅与其邻近的有限个粒子发生相互作用,从而将全局计算转化为局部计算。

非负性:

$$W(r-r', h) \geq 0 \quad (10)$$

此性质有助于保证物理量(如密度)的非负性,增强数值稳定性。常用的核函数包括高斯函数、3次样条函数(B-样条)和5次Wendland函数等。其中,3次样条函数因其计算效率与光滑性的良好平衡,在SPH应用中最广泛。

基于上述函数插值公式,SPH进一步发展了对空间微分算子(如梯度和拉普拉斯算子)的近似。通过对积分表示式中的核函数 W 进行微分,并将微分算子转移到核函数上,可得梯度的SPH近似形式:

$$\nabla f(r_i) \approx \sum_j (m_j / \rho_j) f(r_j) \nabla W(r_i - r_j, h) \quad (11)$$

SPH利用核函数导数来近似场变量的导数,能将N-S方程中的压力梯度和黏性力等直接离散为粒子间作用力,从而把复杂的流体动力学问题转化为多粒子动力系统。其无网格、拉格朗日特性使其在大变形、自由表面流动和多相流等场景中具有天然优势。本文拟将SPH方法应用于水润滑轴承的数值仿真。

1.6 增厚近似 NS 方程

然而,在水润滑轴承中使用SPH方法有一个巨大的建模挑战:运行间隙相对于轴径来说非常的小。以实际直径200.00 mm的轴为例,其圆周长约为628.00 mm,按照装配间隙0.84 mm算,平均水膜厚度只有0.42 mm,如果考虑到偏心率,最薄处的水膜可能仅有5 μm ~10 μm ,也就是说液膜的长度和厚度相差3~4个数量级。如果直接使用SPH方法建模的话,这意味着必须使用非常小的粒子,以5 μm 的粒子估算,直径200 mm长400 mm的体系需要超过8万亿个粒子,这远远超出了现代计算机的处理能力,因此必须使用一些近似简化方法。实际上,即使有

限元方法也会遇到超薄液膜下使用扁长形状体积元的情况, 见图3, 这不仅限制模拟体系的大小, 也带来精度下降等问题。



图3 有限元方法处理液膜时使用扁长形状体积元
Fig. 3 Finite Element Method Uses Oblate Spheroidal Volume Elements When Dealing with Liquid Film

本文提出一种对膜厚进行放大的近似处理方法。通常的量纲分析可以通过无量纲化来缩小模拟规模, 但是水润滑轴承大尺寸和极薄的水膜并不能通过简

单的量纲化方法解决。原则上如果在一个方向进行缩放会破坏流场的相似性。不过, 由于膜厚非常小, 实际更关注其整体的平均行为, 同时在轴向分辨率要求并不高, 通过空间和时间缩比的方式对NS方程进行缩放近似。

在忽略重力的情况下, 普通的不可压缩流体NS方程为

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (12)$$

式中: ∇ 为向量微分算子; p 为流体压力。

根据N-S方程, 分量方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (13)$$

式中: u 、 v 、 w 为速度的3个分量。

方便起见, 将轴-轴承和液膜看作薄片并进行平面展开, 如图4(c)所示。对径向(x 方向)进行 s_x 放

大倍, 见图4(b)。即 $x = s_x x_0$, 同时保持时间单位不变, 于是 $u = s_x u_0$, 新的N-S等效方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left(s_x u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + s_x v \frac{\partial u_0}{\partial y} + s_x w \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho s_x} \frac{\partial p}{\partial x_0} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_0^2} + s_x^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + s_x^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \left(u_0 \frac{\partial v}{\partial x_0} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \left(u_0 \frac{\partial w}{\partial x_0} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{1}{s_x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{cases} \quad (14)$$

保持了密度单位 ρ 和压强单位 p 连续性方程:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (15)$$

分量形式:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

缩放后形式:

$$\frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (17)$$

须注意, 由于密度和压强单位没有改变, 在使用Tait的水状态方程 (Equation of State, EOS) 时

$$p = \frac{c_0^2}{7} [(\rho/\rho_0)^7 - 1] \quad (18)$$

式中: c_0 为声速; ρ_0 为水的初始密度。

实际上的压强与计算的压强有 $p' = s_x^2 p$ 。同时这里忽略了缩放导致的黏性各向异性, 仍使用相同的黏性系数。上述的增厚近似N-S方程即是对原来是标量的黏性系数和密度进行了重新标度。一般地,

如果对 x 、 y 、 z 方向进行了 s_x 、 s_y 、 s_z 的比例缩放, 有这样的近似重新标度关系:

$$\frac{1}{\rho} \rightarrow \left[\frac{1}{s_x \rho} \quad \frac{1}{s_y \rho} \quad \frac{1}{s_z \rho} \right] \quad (19)$$

$$\frac{\mu}{\rho} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \left(\frac{s_x}{s_y} \right)^2 & \left(\frac{s_x}{s_z} \right)^2 \\ \left(\frac{s_y}{s_x} \right)^2 & 1 & \left(\frac{s_y}{s_z} \right)^2 \\ \left(\frac{s_z}{s_x} \right)^2 & \left(\frac{s_z}{s_y} \right)^2 & 1 \end{bmatrix} \frac{\mu}{\rho} \quad (20)$$

经过缩放的N-S方程严格来说已经不再像无量纲处理那样保持流场等比相似性, 不过这是使用粒子法仿真超薄水膜的必要技术处理。这相当于使用扁平的碟形粒子代替球形粒子, 但保持了数学形式上的一致, 这样仅须对现有SPH代码进行少量修改

即可实现。在SPH方法的具体代码实现上,选取了以开源的Lammps代码为基础进行上述修改。Lammps是美国Sandia国家实验室开发的一款分子动力学模拟软件^[26],有强大的并行和任务平衡能力,适合大规模并行仿真模拟,其SPH模块实现了光滑粒子动力学方法。通过修改开源Lammps-SPH的代码,实现上述沿 x 方向进行放大的近似N-S方程和连续性方程积分。

事实上,基于Lammps的SPH代码还能进一步实现固液耦合以及临界破坏的模拟,不过其计算量会剧增,因此本文仅进行了轴承间隙内水的流体仿真。

2 结果与讨论

2.1 轴承模型

水润滑轴承模型的3D粒子构成见图4,这里展示了水膜厚度在不同缩放系数 s_x 下的对比。在水平(圆周)方向上,模拟使用周期性边界条件。图4(c)为最终的展开等效模型,转轴和轴承各包含4层SPH粒子,转轴、轴承和水包含的总SPH粒子数为1 755 444。为清晰显示粒子分布,图4中使用Ovito软件,显示

了去掉端面水粒子之后放大的结构。

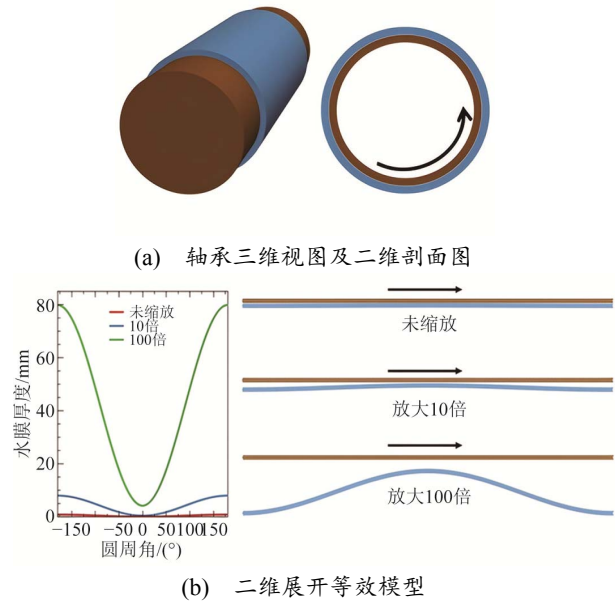


图4 水润滑轴承的平面展开等效模型

Fig. 4 Equivalent Planar Expansion Model of Hydrodynamic Bearings

对表1尺寸水润滑轴承进行仿真。

表1 仿真工作中使用的参数数值

Tab. 1 Parameter Values Used in Simulation

参数	数值
轴直径/mm	200
轴承长度/mm	396
半径间隙/mm	0.42

分别使用有限元求解二维雷诺方程和使用SPH光滑粒子动力学法对膜厚进行100倍放大后的近似N-S方程进行模拟。SPH模拟使用Tait状态方程,为提高数值稳定性将声速 c_0 设为10 m/s,水密度为1 000 kg/m³,动力学积分步长为1 μ s。

2.2 SPH模拟与雷诺方程数值解的对比

首先在稳态条件下对比了SPH(光滑粒子流体力学)模拟所得的压强分布与传统二维雷诺方程的数值解。这里,图5展示转速为400 r/m时,偏心率为0.6和0.9情况下的液膜压强对比结果,这2个偏心率分别对应水膜建立后稳定工况和水膜可能破裂的瞬态工况。图5(a)和图5(b)是二维雷诺方程数值解,见图5(c)和图5(d)。在此过程中,采用了前文所述的对膜厚方向进行100倍放大增厚的近似方法,旨在简化计算模型并提高数值求解的精度。该方法通过对膜厚方向的尺度调整,使得在不显著偏离实际物理特性的前提下,能够更有效地捕捉压力场的变化趋势。通过这样的对比分析,可以进一步验证SPH方法在润滑问题中的适用性及与经典理论的一致性。

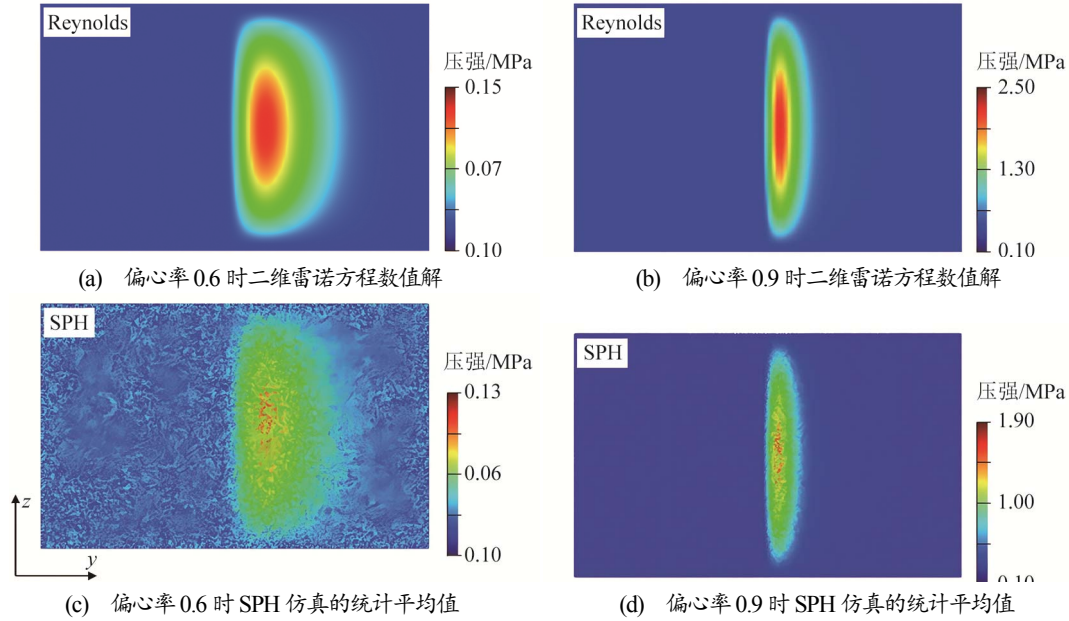


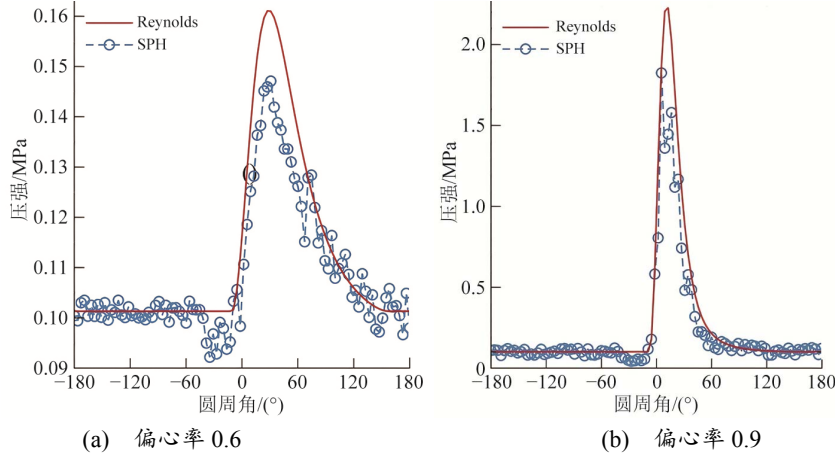
图 5 稳态液膜压强分布

Fig. 5 Pressure Distribution of the Steady-State Liquid Film

从图5可知, SPH方法与传统二维雷诺方程的数值解在稳态下的压强分布趋势上基本一致, 这表明SPH方法在描述流体润滑问题中具有一定的可靠性。然而, 由于SPH方法本质上是一种基于粒子的离散化数值方法, 其计算结果在数值上仍存在一定的波动性。尽管在模拟过程中采用了统计平均处理, 但相较于二维雷诺方程的连续求解方法, SPH方法在局部区域仍表现出较大的数值涨落。此外, SPH模拟所得的液膜压强整体上低于二维雷诺方程的数值解结果。如图5(a)所示, 在偏心率为0.6且转速为400 r/min的工况下, SPH方法计算得到的最大压强约为二维雷诺方程数值解中对应最大压强的80%。这一差异可能来源于粒子流体动力学方法在空间离散化过程中对流体流动特性的近似处理, 以及边界条件和粒子密度分布的影响。

较大偏心率(如0.9)时, SPH方法在处理壁面与液体粒子之间的相互作用时引入了一个粒子半径的物理概念, 使得实际计算的液膜厚度相较于理想化的二维雷诺方程有所减小。因此, 在压强分布图中, 高压区域呈现出更窄的分布趋势。尽管存在这一几何尺度差异, SPH方法仍然能够较好地捕捉压强变化的基本特征。然而, 从图5(b)所示的结果可以看出, SPH模拟所得的最大压强值仍低于二维雷诺方程的数值解结果。这一现象可能是由SPH方法中粒子相互作用的离散性以及流体域边界附近粒子分布不均所导致的局部误差累积效应。

进一步对轴向中心区域的压强沿圆周方向的分布进行了比较分析。在此过程中, SPH模拟选取了轴向中心部分宽度为10 mm的区域, 对其压强进行了统计平均处理, 所得结果见图6。

图 6 稳态液膜在 z 方向中心部分压强沿圆周方向的分布Fig. 6 Pressure Distribution of Steady-State Liquid Film in Circumferential Direction at Central Part Along the z -Axis

从图6中可以观察到, SPH方法所得的压强整体上略低于传统二维雷诺方程的计算结果, 且在部分区域出现了压力值下降的现象, 特别是转轴附近。这种压强降低实际上反映了液膜密度的下降, 甚至可能伴随空洞的产生。如图5所示, 在不同的沿轴位置(z 值不同), 其压强分布也有所不同, 沿轴向对不同位置圆周的结果做与图6类似的统计比较, 使用SPH方法得到的最大压强比二维雷诺方程给出的要小17%~23%。

值得注意的是, 在常规的二维雷诺方程求解中, 往往假设液膜为连续不可压缩介质, 因此在出现密度下降或空洞时, 通常将其简化为大气压处理, 以避免非物理的负压现象。然而, 在SPH方法中, 由于其本质是基于粒子的离散化模型, 能够更自然地描述流体的非均匀性和空洞效应。通过引入Tait状态方程, SPH模拟可以准确捕捉液膜密度与压力之间的非线性关系, 从而有效地反映真实物理过程中的压力波动现象。这一特性使得SPH方法在处理复杂润滑边界条件和非稳态流动行为时具有更高的物理真实性与适用性。

SPH方法相比一些传统的静态数值方法, 其突出优势在于能够模拟流体的动态过程, 从而更真实地反映液体膜在实际工况下的演化行为。针对不同偏心率条件, 研究了水膜从初始静止状态逐步建立起流场梯度的动态过程, 见图7。图7中展示了水膜密度随时间的变化趋势, 清晰地体现了SPH方法在时间演化方面的能力。在初始阶段, 水膜密度较低, 表明液体尚未充分填充润滑间隙; 随着转速的增加或轴向运动的持续, 水膜密度逐渐上升, 流场梯度随之形成, 这反映了流体在润滑槽中流动并建立承载能力的物理过程。

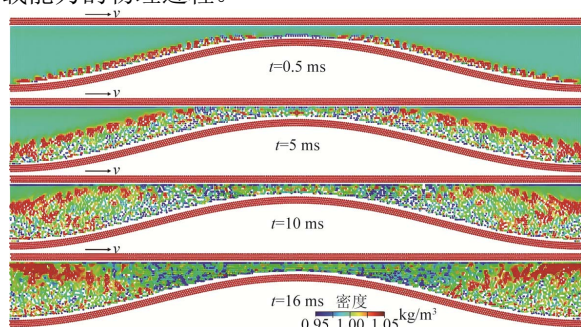


图7 偏心率0.6时水膜中密度变化过程

Fig. 7 Density Variation in Water Film When Eccentricity is 0.6

相较于传统静态求解方法, SPH方法不仅能够追踪水膜的动态变化, 还能自然地处理液膜的不连续性和空洞现象, 为研究润滑性能的非稳态行为提供了更为可靠和直观的工具。当然, 由于SPH方法使用了大量的显式粒子, 同时仿真的问题为三维的

动态过程, 因此在计算量上相比传统二维雷诺方程要大得多。在本例中, 对SPH的求解效率做一个简单比较: 求解二维雷诺方程使用的自编代码, 在普通台式机上单核运行一次300×200网格的求解仅须15 s左右。而使用Lammps-SPH仿真, 步长0.001 ms, 一次500 ms的仿真, 由于包含约176万仿真粒子, 即使并行使用64核CPU (AMD EPYC 7742, Linux, OpenMPI) 也需要约16 000 s (约4.4 h)。因此在实际仿真中还是需要先使用二维雷诺方程进行参数粗筛, 然后再使用SPH进行瞬态仿真。

在数值计算中, 为了保持SPH方法的稳定性, 通常会引入人工声速来增强粒子之间的压力响应和提高计算的数值稳定性。与多数SPH文献中采用的做法一致, 使用了较小的人工声速, 因此在模拟过程中可以观察到密度波的传播现象, 这有助于更好地可视化流体的动态行为。

在图7中展示的水膜密度随时间的变化过程中, 可以明显观察到密度波的形成与传播。这一现象反映了流体在润滑间隙中由于流动引起的密度分布变化, 进而影响其压力场的演化。值得注意的是, 在实际的水润滑轴承系统中, 真实水的声速远高于所采用的人工声速, 这意味着实际的密度波动传播过程要远远快于模拟中所呈现的速度。因此, 所观察到的密度波动可能在现实系统中仅持续极短的时间, 从而使得压力场的变化更加剧烈和迅速。压力与密度之间存在紧密的非线性关系 (如通过Tait状态方程所描述的), 这种快速的密度波动会导致压强的显著变化, 甚至可能引发局部高压或低压区的迅速生成与消失。在SPH模拟中, 这种压强波动的现象可以被清晰地捕捉与呈现, 为研究实际工况下水膜的非稳态压力响应提供了有效的手段。

当偏心率较大时, 例如在许多实际水润滑轴承中出现在较低转速下的工况, 由于轴与轴承之间的间隙形状变化显著, 水膜可能会发生断裂, 这种现象在图8中得到了展示, 其中偏心率为0.8的情况被选为典型示例。从图中可以看到, 在约100 ms时出现了明显的液膜断裂现象, 表明此时润滑液因流动不连续或液体供应不足而在最小间隙处流失。

需要强调的是, SPH方法作为一种基于粒子的数值模拟方法, 具有处理流体破裂和重新形成过程的独特优势。与传统的连续介质模型不同, SPH不依赖于网格划分, 而是通过粒子间的相互作用来模拟流体行为。因此, 当水膜断裂后, 在后续模拟中, 液体粒子仍可能重新汇聚到该区域, 如图8所示, 在300 ms时显示, 原始断裂处已出现了新的流体粒子分布, 表明液膜的重新建立。关于水膜断裂的具体判断标准, 目前没有已发表论文作为参考。在SPH仿真结果中, 可以基于粒子携带的密度信息或2个粒

子之间的距离进行判断。使用粒子携带的密度信息是最简单直接的方法, 不过可能会因为边界的影响导致误判。因此建议根据粒子间距离计算近邻粒子数来进行水膜破裂判断: 先计算无水膜断裂情况下粒子的近邻数分布, 然后再计算明显有水膜断裂情况下的粒子近邻数分布, 对比2种情况的近邻数分布确定当粒子的近邻数低于多少时即发生水膜破裂。在仿真工况下, 这个数值为3, 即当一个粒子的近邻数低于3时认为液膜断裂。

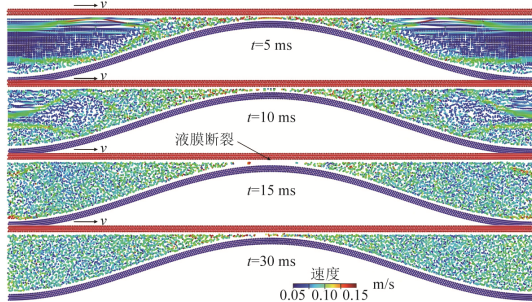


图8 偏心率 0.8 时可能出现的液膜断裂现象

Fig. 8 Rupture of Liquid Film When Eccentricity is 0.8

这种液膜的破裂—重新形成过程会导致最小间隙处密度和压强发生剧烈波动, 这是因为在局部区域流体流量突然变化, 进而引发压力激增或骤降, 从而影响整个润滑系统的动态行为。这种现象也进一步解释了图5和图6中所观察到的压强分布波动。

综上所述, SPH方法不仅能够准确捕捉水膜在偏心率较大时的断裂现象, 还能模拟其在后续再形成的过程, 从而提供了一个更加贴近实际物理机制的润滑流动分析工具, 尤其适用于研究非稳态、非线性以及流体破裂等复杂现象。

这种液膜的断裂现象在更大的偏心率(如0.9)时更加显著。如图9所示, 当偏心率增加到0.9时, 润滑间隙的几何变化更加剧烈, 导致液膜更容易发生断裂, 并呈现出更复杂的流动结构。

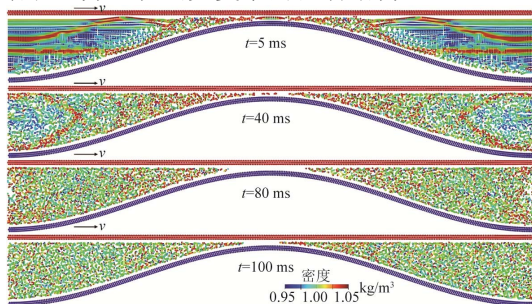


图9 偏心率 0.9 时液膜断裂现象更明显

Fig. 9 Rupture of Liquid Film Becomes More Apparent When Eccentricity is 0.9

需要说明, 在模拟中对液膜进行了放大和增厚的处理, 放大了100倍。这一人为的缩放方法有助于

增强对液膜内部密度波干涉、水流分层以及流场梯度建立等微观流动现象的观察与分析。这些现象在真实系统中由于液膜极薄, 难以用传统方法清晰捕捉, 而SPH的离散粒子结构恰好具备更高的可视化能力和细节分辨能力。

尽管这些模拟结果是基于较低的人工声速和液膜厚度放大的近似条件, 但仍然能有效揭示液膜中局部流场梯度形成的过程, 并且说明在高偏心率下, 流体与固体边界之间的相互作用变得更加显著和复杂。这种模拟方式能够清晰地展现出液膜在非稳态、非均匀流动条件下的动力学行为, 包括密度波动、压力异常、流场分离与重新组织等, 这些都是传统数值方法(如有限体积法、有限元法)在处理流体断裂边界和大变形问题时所面临的挑战。因此, SPH方法在研究液膜断裂与流动结构演化问题上展现出了独特的优越性。SPH方法不仅能够准确描述液膜的断裂过程, 还能动态捕捉液膜的重新形成和结构重建, 从而揭示传统方法难以获得的流场梯度形成机制。这种能力使得SPH成为研究高偏心率、非稳态以及复杂边界条件下润滑流动行为的一个强有力工具, 为理解实际水润滑轴承的动态特性提供了重要的理论依据和计算支持。

SPH方法能够提供液膜截面的详尽流动信息。图10展示了在偏心率为0.6且转速为400 r/min的条件下, 液膜截面内的流场速度分布与平均压强分布。从图10可知, 在活动上板(轴)与液体之间存在显著的速度梯度, 这表明尽管SPH模拟已设定水与活动上板之间的黏度, 但实际模拟中水的黏度较低仍导致了两者之间的相对滑动。这种相对滑动可能是SPH模拟所得压强值较雷诺方程预测结果偏低的一个原因。此外, 观测到截面内的压强分布存在一定的空间变化, 其变化趋势与液膜厚度及高度相关。然而, 由于在SPH模拟过程中采用了液膜厚度的放大处理, 而实际液膜厚度非常微小, 因此压强随液膜高度的变化可以近似视为二维情形, 从而使得压强分布可用二维雷诺方程进行简化或平均处理。

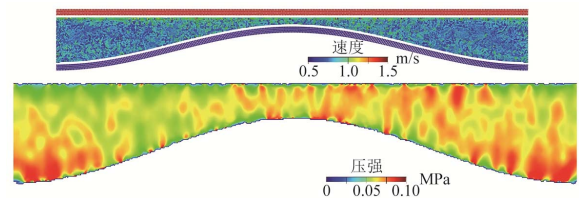


图10 偏心率 0.6 时液膜截面的流场速度和压强分布

Fig. 10 Field of Flow Velocity and Pressure Distribution in Liquid Film Cross-Section at Eccentricity of 0.6

经过上述对水润滑轴承的SPH方法模拟结果分析, 本文认为通过对液膜厚度进行适当增厚近似, SPH方法能够有效用于研究水润滑轴承中液膜的瞬

态演变过程。该方法在揭示液膜形成机理以及进一步明确液膜形成条件方面具有重要的理论指导价值。然而,也发现,在压强计算方面,SPH方法仍存在一定的数值精度缺陷。造成这一问题的原因主要包括以下3个方面:1)液膜增厚引起的N-S方程的近似;2)固-液界面处真实黏度值的不确定性;3)未考虑流体与固体之间的耦合作用。针对上述问题,进一步优化和改进SPH方法将有助于提升其在真实水润滑轴承工况下的模拟精度与可靠性。通过改善这些数值缺陷,SPH方法有望更准确地捕捉液膜的瞬态行为,获取传统方法难以获得的动态信息,从而为高性能水润滑轴承的设计与改进提供更加有力的理论支持。此外,目前的方法还未考虑轴承的弹性变形以及热变形的因素,这些也是未来研究需要处理的地方。

3 结论

通过引入空间缩放方法,推导了在液膜增厚近似条件下的N-S方程缩放形式,并基于SPH方法实现了该近似方程的粒子模拟。将SPH方法应用于水润滑轴承的仿真中,并将模拟结果与传统二维雷诺方程的数值解进行了对比,得出以下结论:

1) SPH方法所获得的压强分布与雷诺方程的数值解在整体形态上较为接近,但在数值大小上表现出一定的偏低趋势,这一偏差可能源于液膜增厚所引入的NS方程近似。

2) SPH方法不仅能够提供液膜速度梯度的建立过程,还能有效模拟液膜在动态过程中的断裂与愈合现象,从而为液膜行为的瞬态分析提供更为丰富的信息。

3) 尽管SPH方法能够准确描述液膜界面内的流场与压强分布,但其在固-液界面处黏度的处理上存在局限,影响了实际应用精度,仍有进一步改进的空间。

综上所述,SPH方法在水润滑轴承的瞬态仿真中展现出良好的应用前景与显著的潜力,未来通过优化其在界面黏度处理和N-S方程近似方面的模型,进一步考虑固-液耦合和热效应耦合,有望实现更精确的模拟与分析。如:为工程设计给出更精确指导;给出在工程上减缓水膜形成期振动和磨损的设计;给出在工程上加快水膜形成的方案。

参考文献:

- [1] 段海涛,王学美,吴伊敏,等.水润滑轴承研究进展[J].润滑与密封,2012,37(9):109-116.
DUAN H T, WANG X M, WU Y M, et al. Present Research Status of Water Lubricated Bearings[J]. Lubrication Engineering, 2012, 37(9): 109-116.
- [2] 潘文翔.海水淡化高压泵与能量回收一体机水润滑轴承-转子系统动力学特性研究[D].江苏镇江:江苏大学,2022.
PAN W Y. Study on Dynamic Characteristics of Water Lubricated Bearing Rotor System of Energy Recovery Turbocharger for Seawater Desalination[D]. Zhenjiang, Jiangsu: Jiangsu University, 2022.
- [3] XIANG G, WANG Y, WANG C, et al. Numerical Study on the Dynamic Characteristics of Water-Lubricated Rubber Bearing Under Asperity Contact[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2021, 73(4): 572-580.
- [4] 田雨欣,田佳彬,杨铭,等.船舶水润滑轴承摩擦动力学研究[J].船舶工程,2025,47(6):7-24.
TIAN Y X, TIAN J B, YANG M, et al. Overview of Friction Dynamics of Ship Water Lubricated Bearings[J]. Ship Engineering, 2025, 47(6): 7-24.
- [5] 刘时铭,田雨欣,杨铭,等.船用新型水润滑轴承结构优化设计研究[J].船舶工程,2024,46(12):16-33.
LIU S M, TIAN Y X, YANG M, et al. Research on Structural Optimization Design of a New Marine Water Lubricated Bearing[J]. Ship Engineering, 2024, 46(12): 16-33.
- [6] 刘杰,胡文静,孙锋,等.不同水槽分布的SF-2A材料水润滑轴承摩擦学性能研究[J].润滑与密封,2025,50(5):20-27.
LIU J, HU W J, SUN F, et al. Tribological Properties of SF-2A Materials Water-Lubricated Stern Bearing with Different Flume Distributions[J]. Lubrication Engineering, 2025, 50(5): 20-27.
- [7] WANG Y, SHI X, ZHANG L. Experimental and Numerical Study on Water-Lubricated Rubber Bearings[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2014, 66(2): 282-288.
- [8] 许钟颖,韩彦峰,黄景东,等.滑动轴承仿真分析技术进展及前沿探索[J].船舶工程,2025,47(6):25-37.
XU Z Y, HAN Y F, HUANG J D, et al. Progress and Frontier Exploration of Simulation Analysis Techniques for Sliding Bearings[J]. Ship Engineering, 2025, 47(6): 25-37.
- [9] 王艳真,钟涛,张秀丽,等.复合材料水润滑轴承结构设计研究[J].机械传动,2021,45(1):90-98.
WANG Y Z, ZHONG T, ZHANG X L, et al. Research on the Structure Design of Composite Water-Lubricated Stern Bearing[J]. Journal of Mechanical Transmission, 2021, 45(1): 90-98.
- [10] 欧阳益虎.船舶水润滑轴承内杂质堆积的润滑计算方法及性能研究[D].武汉:华中科技大学,2021.

- OUYANG Y H. The Calculation Method and Performance of the Accumulation of Impurities in the Water Lubrication Bearings of Ships[D]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology, 2021.
- [11] 吴明哲, 郭文军, 崔建伟. 液压桩锤推力轴承的疲劳寿命分析计算[J]. 船舶工程, 2025, 47(增刊 1): 433-436.
- WU M Z, GUO W J, CUI J W. Fatigue Life Analysis and Calculation of Hydraulic Pile Thrust Bearing[J]. Ship Engineering, 2025, 47(Suppl. 1): 433-436.
- [12] HU D, GUO Z, XIE X, et al. Effect of Spherical-Convex Surface Texture on Tribological Performance of Water-Lubricated Bearing[J]. Tribology International, 2019, 134: 341-351.
- [13] WANG Y, ZHANG C, WANG Q J, et al. A Mixed-TEHD Analysis and Experiment of Journal Bearings Under Severe Operating Conditions[J]. Tribology international, 2002, 35(6): 395-407.
- [14] 彭娅玲, 张志国, 陈汝刚, 等. CFD 辅助船舶艏部水润滑轴承设计的研究[J]. 润滑与密封, 2008, 33(5): 72-76.
- PENG Y L, ZHANG Z G, CHEN R G, et al. Study of CFD Aid Design of Ship Water Journal Bearing of Shaft[J]. Lubrication Engineering, 2008, 33(5): 72-76.
- [15] GAO G, YIN Z, JIANG D, et al. CFD Analysis of Load-Carrying Capacity of Hydrodynamic Lubrication on a Water-Lubricated Journal Bearing[J]. Industrial Lubrication and Tribology, 2015, 67(1): 30-37.
- [16] 巩占峰, 杜毅斐, 席飞, 等. 基于 SPH 方法的高集成电驱动壳体润滑结构优化[J]. 汽车实用技术, 2022, 47(22): 70-74.
- GONG Z F, DU Y F, XI F, et al. The Lubrication Structure Optimization of Reducer Housing in Integrated Electric Drive System Based on SPH Method[J]. Automobile Applied Technology, 2022, 47(22): 70-74.
- [17] 汪骥, 于鹏法, 李瑞, 等. 矩形沟槽结构参数对水润滑轴承润滑性能的影响[J]. 船舶工程, 2024, 46(2): 90-98.
- WANG J, YU P F, LI R, et al. Effect of Structural Parameters of Rectangular Grooves on Lubrication Performance of Water-Lubricated Bearings[J]. Ship Engineering, 2024, 46(2): 90-98.
- [18] ZHANG S, JIANG S, LIN X. Static and Dynamic Characteristics of High-Speed Water-Lubricated Spiral-Groove Thrust Bearing Considering Cavitating and Centrifugal Effects[J]. Tribology International, 2020, 145: 106159.
- [19] 奚蒙, 何涛, 吴志猛, 等. 水润滑轴承形成动压润滑的研究[J]. 船舶物资与市场, 2021, 9(2): 8-10.
- XI M, HE T, WU Z M, et al. Research on Hydrodynamic Lubrication of Water-Lubricated Bearings[J]. Marine Equipment/Materials & Marketing, 2021, 9(2): 8-10.
- [20] 高庚员. 泵用水润滑轴承动压润滑机理及优化设计研究[D]. 上海: 上海交通大学, 2016.
- GAO G Y. Research of Hydrodynamic Lubrication Mechanism and Optimization of Pump Water-Lubricated Bearings[D]. Shanghai: Shanghai Jiao Tong University, 2016.
- [21] XIE Z, ZHANG Y, ZHOU J, et al. Theoretical and Experimental Research on the Micro Interface Lubrication Regime of Water Lubricated Bearing[J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2021, 151: 107422.
- [22] 方斌. 船舶水润滑轴承刚度耦合计算方法初探[J]. 船舶, 2017, 28(4): 69-73.
- FANG B. Preliminary Research on Coupling Calculation for Stiffness of Marine Water-Lubricated Bearing[J]. Ship & Boat, 2017, 28(4): 69-73.
- [23] GINGOLD R A, MONAGHAN J J. Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Non-Spherical Stars[J]. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 1977, 181(3): 375-389.
- [24] LUCY L B. A Numerical Approach to the Testing of the Fission Hypothesis[J]. Astronomical Journal, 1977, 82(12): 1013-1024.
- [25] MONAGHAN J J. Simulating Free Surface Flows with SPH[J]. Journal of Computational Physics, 1994, 110(2): 399-406.
- [26] PLIMPTON S. Fast Parallel Algorithms for Short-Range Molecular Dynamics[J]. Journal of Computational Physics, 1995, 117: 1-19.