

## 附录 1

附录 1 给出 Gompertz-Makeham 模型极大似然估计的正规方程组、BFGS 算法流程以及分段 Perks 公式的非线性最小二乘估计。

## 1. Gompertz-Makeham 模型的正规方程组

对数似然函数的正规方程组为：

$$\begin{cases} \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \alpha_h} = \sum_x \left( \frac{D_x}{\lambda(x)} - L_x \right) x^{h-1} = 0, & h=1, 2, 3, \dots, r \\ \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \beta_k} = \sum_x \left( \frac{D_x}{\lambda(x)} - L_x \right) x^{k-1} e^{\sum_{i=1}^v \beta_i x^{i-1}} = 0, & k=1, 2, 3, \dots, v \end{cases}$$

## 2. BFGS 算法流程

定义对数似然函数的一阶偏导数为：

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \left( \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \alpha_r}, \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \beta_1}, \dots, \frac{\partial l_p(\lambda | \mathbf{D}, \mathbf{L})}{\partial \beta_v} \right)^T$$

并记  $f(\boldsymbol{\theta})$  的雅克比矩阵为  $H(\boldsymbol{\theta})$ ，其中  $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})^T$  以及  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ ， $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_v)$ 。由于待估参数较多，雅克比矩阵可能存在不可逆的问题，因此使用 BFGS 算法求出近似的雅克比矩阵，进而求出参数的数值解。流程如算法 1 所示。

## 算法 1 BFGS 算法

输入：给定初始值  $\boldsymbol{\alpha}^0 = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_r^0)$   $\boldsymbol{\beta}^0 = (\beta_1^0, \dots, \beta_v^0)$ ， $B_0 = I$ ，阈值  $\epsilon$

输出：参数估计值  $\hat{\boldsymbol{\alpha}} = (\hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_r)$ ， $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_v)$

- 1: 对于  $k = 0, 1, 2, \dots$
- 2: 第  $k$  次参数估计值  $\boldsymbol{\theta}^k = (\boldsymbol{\alpha}^k, \boldsymbol{\beta}^k)^T$ ，确定搜索方向  $d_k = B_k^{-1} f(\boldsymbol{\theta}^k)$ ；
- 3: 确定步长  $\lambda_k$ ，令  $s_k = -\lambda_k d_k$ ；
- 4: 第  $k+1$  次参数估计值为  $\boldsymbol{\theta}^{k+1} = \boldsymbol{\theta}^k + s_k$ ；若  $|f(\boldsymbol{\theta}^{k+1})| \leq \epsilon$ ，停止迭代，输出  $\boldsymbol{\theta}^{k+1}$ ，否则进行 5；
- 5: 计算  $y_k = f(\boldsymbol{\theta}^{k+1}) - f(\boldsymbol{\theta}^k)$ ；
- 6: 计算第  $k+1$  次迭代雅克比矩阵的近似矩阵  $B_{k+1} = B_k - \frac{B_k s_k s_k^T B_k}{s_k^T B_k s_k} + \frac{y_k y_k^T}{y_k^T s_k}$ ，返回 1。

## 3. 分段 Perks 公式的非线性最小二乘估计

本部分使用非线性最小二乘估计获得正文式(3)的参数估计。最小化目标函数为：

$$SSE = \sum_x \left( \hat{\mu}^{12}(x) - \mu^{12}(x) \right)^2$$

于是当  $x_0 = 65$  时，

$$SSE = \sum_{x_0=65} \left[ \hat{\mu}^{12}(x) - \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x + Kc^{-x}} - H \right]^2 \quad (1)$$

令  $v_1(x) := \hat{\mu}^{12}(x) - \frac{A + Bc^x}{1 + Dc^x + Kc^{-x}} - H$ ， $v_2(x) := 1 + Dc^x + Kc^{-x}$ 。式(1)分别关于

$A, B, c, D, K, H$  求一阶偏导，即：

$$\frac{\partial SSE}{\partial A} = -2 \sum_{x..65} \frac{v_1(x)}{v_2(x)} = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial B} = -2 \sum_{x..65} v_1(x) \cdot \frac{c^x}{v_2(x)} = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial c} = -2 \sum_{x..65} v_1(x) \cdot \log(c) \left[ \frac{Bc^x}{v_2(x)} - \frac{(A + Bc^x)(Dc^x - Kc^{-x})}{[v_2(x)]^2} \right] = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial D} = 2 \sum_{x..65} v_1(x) \cdot \frac{(A + Bc^x)c^x}{[v_2(x)]^2} = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial K} = 2 \sum_{x..65} v_1(x) \cdot \frac{(A + Bc^x)c^{-x}}{[v_2(x)]^2} = 0$$

$$\frac{\partial SSE}{\partial H} = -2 \sum_{x..65} v_1(x) = 0$$

通过使用拟牛顿算法 BFGS 求解方程组(2)，可以得到参数的估计值  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{c}, \hat{D}, \hat{K}, \hat{H}$ 。于是

$$\hat{a}(x) = \frac{\hat{A} + \hat{B}\hat{c}^x}{1 + \hat{D}\hat{c}^x + \hat{K}\hat{c}^{-x}} + \hat{H}$$

当  $x..65$  时，

$$SSE = \sum_{x..65} \left[ \hat{\mu}^{12}(x) - \gamma_1(x-65)^5 - \gamma_2(x-65)^4 - \dots - \gamma_6 \right]^2 \quad (3)$$

为保证平滑性，要求  $a(65) = b(65)$  和  $a'(65) = b'(65)$ ，从而令  $\hat{\gamma}_6 = \hat{a}(65)$ ，

$\hat{\gamma}_5 = \hat{a}'(65)$ ，式(3)分别关于  $\{\gamma_i\}_{i=1,2,3,4}$  求一阶偏导，即

$$\frac{\partial SSE}{\partial \gamma_i} = -2 \left( \sum_x \hat{\mu}_x^{12} (x-65)^{6-i} - \gamma_1 \sum_x (x-65)^{11-i} - \gamma_2 \sum_x (x-65)^{10-i} - \dots - \gamma_6 \sum_x (x-65)^{6-i} \right) = 0 \quad (4)$$

拟牛顿算法 BFGS 求解式(4)，得到参数的估计值  $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \hat{\gamma}_3, \hat{\gamma}_4$ 。

## 附表和附图

附表 1

模型的 BIC 比较

模型	男	女
GM(0,2)	35536.17	33043.20
GM(0,3)	34596.93	<b>32466.67</b>
GM(0,4)	34521.98	32471.07
GM(1,2)	34682.52	32495.22
GM(1,3)	34595.07	32474.19
GM(1,4)	49347.73	48121.75
GM(2,2)	34582.72	32520.56
GM(2,3)	<b>34517.54</b>	32487.93
GM(2,4)	35047.94	33290.89
GM(3,2)	37450.71	35770.51
GM(3,3)	36241.23	38143.53
GM(3,4)	39397.66	38153.80

附表 2

基于重疾发生率表重疾险纯保险费率

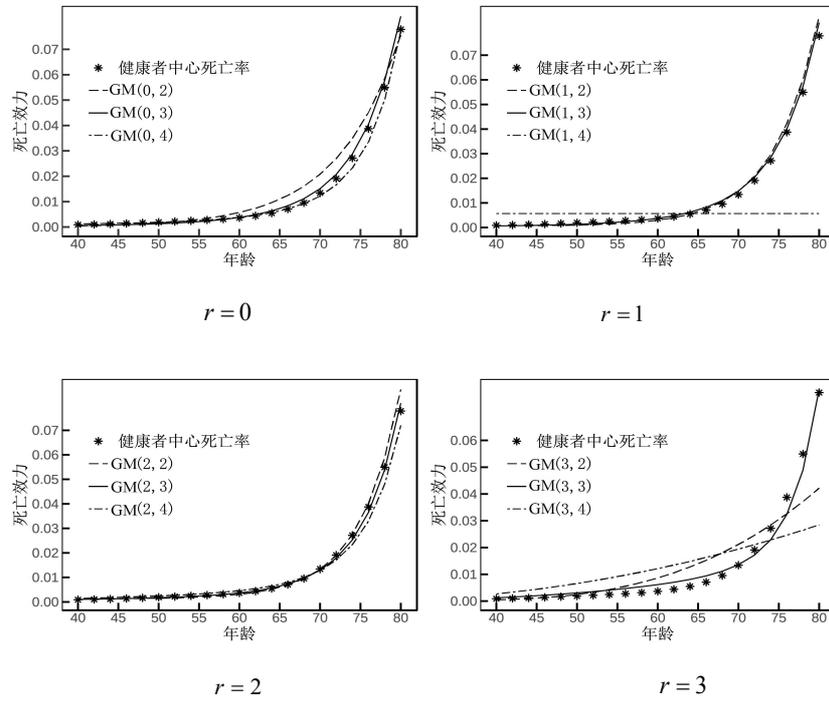
(元)

年龄	基于重疾发生率表（2020）		基于重疾发生率表（2006—2010）	
	男	女	男	女
18	4.7823	4.5777	6.6819	6.7322
19	5.2216	5.1159	7.1762	7.1744
20	5.7603	5.7334	7.7480	7.6795
21	6.4048	6.4335	8.4054	8.2520
22	7.1618	7.2193	9.1574	8.8967
23	8.0382	8.0942	10.0137	9.6186
24	9.0415	9.0615	10.9854	10.4231
25	10.1794	10.1244	12.0844	11.3158
26	11.4601	11.2864	13.3238	12.3028
27	12.8919	12.5508	14.7177	13.3901
28	14.4837	13.9208	16.2814	14.5845
29	16.2446	15.3999	18.0314	15.8928
30	18.1838	16.9912	19.9850	17.3222

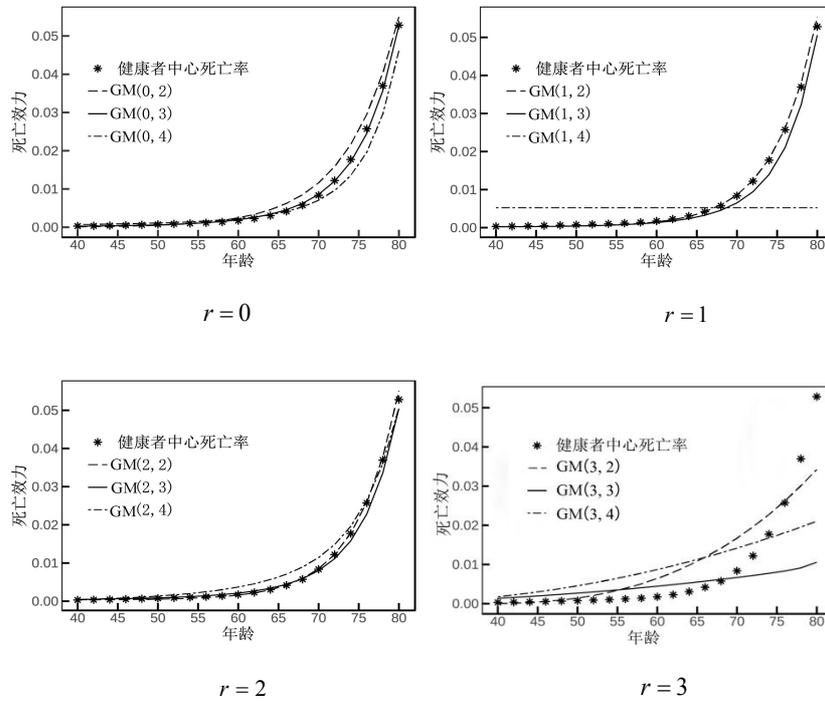
---

31	20.3111	18.6981	22.1609	18.8802
32	22.6363	20.5238	24.5783	20.5744
33	25.1696	22.4714	27.2574	22.4130
34	27.9211	24.5442	30.2192	24.4041
35	30.9015	26.7454	33.4848	26.5564
36	34.1213	29.0781	37.0754	28.8784
37	37.5913	31.5456	41.0123	31.3791
38	41.3223	34.1512	45.3160	34.0674
39	45.3253	36.8982	50.0058	36.9526
40	49.6112	39.7904	55.0996	40.0438
41	54.1913	42.8314	60.6134	43.3504
42	59.0766	46.0256	66.5604	46.8816
43	64.2786	49.3775	72.9508	50.6469
44	69.8089	52.8924	79.7912	54.6556
45	75.6797	56.5765	87.0842	58.9173
46	81.9034	60.4368	94.8282	63.4415
47	88.4935	64.4818	103.0176	68.2380
48	95.4644	68.7214	111.6422	73.3170
49	102.8323	73.1678	120.6885	78.6889
50	110.6153	77.8356	130.1398	84.3653
51	118.8343	82.7426	139.9779	90.3587
52	127.5140	87.9104	150.1842	96.6833
53	136.6838	93.3655	160.7417	103.3552
54	146.3792	99.1401	171.6377	110.3938
55	156.6438	105.2737	182.8664	117.8221
56	167.6368	112.0405	194.7564	125.9109
57	180.4830	120.0727	208.6086	135.4957
58	194.8645	129.2795	223.8805	146.4646
59	210.7037	139.6850	240.4249	158.8012
60	228.1147	151.4127	258.3896	172.5724

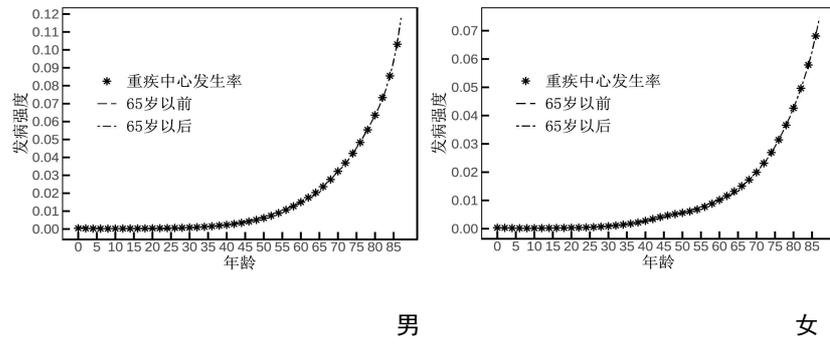
---



附图 1 基于 GM 模型的健康者死亡力拟合效果，散点图表示健康者中心死亡率(2020，男性)



附图 2 基于 GM 模型的健康者死亡力拟合效果，散点图表示健康者中心死亡率(2020，女性)



附图 3 分性别发病强度估计