附录 1：模型对数似然函数的推导过程

模型假设$v_{it} \sim N(0,\sigma_v^2)$和$u_{it} \sim N^+(\mu_{it},\sigma_u^2)$，给出相应概率密度函数为：

$$f_v(v_{it}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_v}\exp\left(-\frac{v_{it}^2}{2\sigma_v^2}\right) \tag{1}$$

$$f_u(u_{it}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\exp\left(-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2\sigma_u^2}\right), u_{it} \geq 0 \tag{2}$$

假设v_{it}和u_{it}相互独立，给出两者的联合概率密度函数为：

$$f_{vu}(v_{it},u_{it}) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_u\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\exp\left(-\frac{v_{it}^2}{2\sigma_v^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2\sigma_u^2}\right) \tag{3}$$

由$\epsilon_{it} = v_{it} - u_{it}$可知$v_{it} = \epsilon_{it} + u_{it}$，将其代入式（3）中给出$\epsilon_{it}$和$u_{it}$的联合概率密度函数为：

$$f_{\epsilon u}(\epsilon_{it},u_{it}) = \frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_u\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\exp\left(-\frac{(\epsilon_{it}+u_{it})^2}{2\sigma_v^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2\sigma_u^2}\right) \tag{4}$$

对式（4）做u_{it}的积分，给出ϵ_{it}的边缘分布为：

$$\begin{aligned} f_\epsilon(\epsilon_{it}) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_u\sigma_v\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\exp\left(-\frac{(\epsilon_{it}+u_{it})^2}{2\sigma_v^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2\sigma_v^2}\right)du_{it} \\ &= \frac{1}{\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right)\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sigma_*}\phi\left(\frac{u_{it}-\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)du_{it} \\ &= \frac{1}{\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right)\Phi(\mu_{it}^*/\sigma_*) \end{aligned} \tag{5}$$

式（5）中$\sigma^2 \equiv \sigma_v^2 + \sigma_u^2$，$\mu_{it}^* \equiv (\sigma_v^2\mu_{it} - \sigma_u^2\epsilon_{it})/\sigma^2$，$\sigma_* \equiv \sigma_u\sigma_v/\sigma$，进而给出模型 t 时期残差向量$\boldsymbol{\epsilon_t}$的对数联合概率密度函数为：

$$\ln f_{\boldsymbol{\epsilon}}(\boldsymbol{\epsilon_t}) = -N\ln\sigma - \sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right) + \sum_{i=1}^{N}\ln\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right) + \sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right) \tag{6}$$

已知有 $d\boldsymbol{\epsilon_t}/d\boldsymbol{y_t}' = \boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W}$，借由雅可比行列式容易得出被解释变量向量$\boldsymbol{y_t}$的对数联合密度函数为：

$$\begin{aligned} \ln f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y_t}) = \ln|\boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W}| - N\ln\sigma - \sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right) + \sum_{i=1}^{N}\ln\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right) \\ + \sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right) \end{aligned} \tag{7}$$

由此给出模型的对数似然函数为：

$$\begin{aligned} \ln L = T\ln|\boldsymbol{I_N} - \rho\boldsymbol{W}| - NT\ln\sigma - \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right) \\ + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\ln\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right) + \sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right) \end{aligned} \tag{8}$$

附录 2：模型对数似然函数的一阶条件

计算并汇报对数似然函数的一阶条件如下所示：

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\beta}}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma^2}+\frac{\phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\frac{\sigma_u}{\sigma_v\sigma}\right)\boldsymbol{x_{it}}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \boldsymbol{\delta}}=\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(-\frac{1}{\sigma_u}\frac{\phi(\mu_{it}/\sigma_u)}{\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}-\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma^2}+\frac{\phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\frac{\sigma_v}{\sigma_u\sigma}\right)\boldsymbol{z_{it}}=0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_v}=&-NT\frac{\sigma_v}{\sigma^2}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\epsilon_{it}+\mu_{it})^2\sigma_v}{\sigma^4}\\&+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\left(\frac{\sigma_u}{\sigma^3}(\mu_{it}+\epsilon_{it})+\frac{\sigma_u}{\sigma_v^2\sigma}\epsilon_{it}\right)=0\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma_u}=&-NT\frac{\sigma_u}{\sigma^2}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\phi(\mu_{it}/\sigma_u)}{\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\frac{\mu_{it}}{\sigma_u^2}+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{(\epsilon_{it}+\mu_{it})^2\sigma_u}{\sigma^4}\\&-\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\frac{\phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\left(\frac{\sigma_v}{\sigma^3}(\mu_{it}+\epsilon_{it})+\frac{\sigma_v}{\sigma_u^2\sigma}\mu_{it}\right)=0\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \ln L}{\partial \rho}=&-T tr((\boldsymbol{I_N}-\rho\boldsymbol{W})^{-1}\boldsymbol{W})\\&+\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_{ij}y_{jt}\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma^2}+\frac{\phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\frac{\sigma_u}{\sigma_v\sigma}\right)=0\end{aligned} \tag{5}$$

式（5）中，$tr(\cdot)$代表矩阵的迹运算。

附录 3：技术效率最优预测值的推导过程

（一）截断正态分布的相关性质

假设随机变量 u 服从均值为μ，方差为σ^2的正态分布，记为 $u \sim N(\mu,\sigma^2)$。则有 $u|u>0$ 服从截断正态分布，记为 $u|u>0 \sim N^{+}(\mu,\sigma^2)$，相应的概率密度函数为：

$$f(u|u>0)=\frac{1}{\Phi(\mu/\sigma)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{1}$$

据此可以计算出：

$$\mathrm{E}(\exp(-u))=\int_{0}^{+\infty}\exp(-u)\frac{1}{\Phi(\mu/\sigma)}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\Phi(\mu/\sigma)}\exp\left(-\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{u-(\mu-\sigma^2)}{\sigma}\right)\mathrm{d}u \tag{2}$$

$$=\frac{\Phi(\mu/\sigma-\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)}\exp\left(-\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$$

（二）技术效率最优预测值

依定义计算$u_{it}|\epsilon_{it}$的概率密度函数：

$$\frac{f_{\epsilon u}(\epsilon_{it},u_{it})}{f_{\epsilon}(\epsilon_{it})}=\frac{\frac{1}{2\pi\sigma_v\sigma_u\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\exp\left(-\frac{(\epsilon_{it}+u_{it})^2}{2\sigma_v^2}-\frac{(u_{it}-\mu_{it})^2}{2\sigma_u^2}\right)}{\frac{1}{\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)}\frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right)\Phi\left(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*}\right)} \tag{3}$$

$$=\frac{1}{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*})}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{*}}\exp\left(-\frac{\left(u-\mu_{it}^{*}\right)^2}{2\sigma_{*}^2}\right)$$

对比式（1）与式（3），易知$u_{it}|\epsilon_{it}$服从参数为μ_{it}^{*}和σ_{*}的截断正态分布，由式（2）可以直接给出技术效率最优预测值的计算公式为：

$$\mathrm{E}(\exp(-u_{it})|\epsilon_{it})=\frac{\Phi(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*}-\sigma_{*})}{\Phi\left(\mu_{it}^{*}/\sigma_{*}\right)}\exp\left(-\mu_{it}^{*}+\frac{1}{2}\sigma_{*}^2\right) \tag{4}$$

附录 4：参数向量$\boldsymbol{\delta}$与边际效应在符号上的关系

构造出如下函数式：

$$\psi(\mu,\sigma)=\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)-\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\sigma\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right) \tag{1}$$

求式（1）关于μ的偏导数为：

$$\frac{\partial\psi(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\left((\mu-\sigma^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right) \tag{2}$$

显然，有$\Phi(\mu/\sigma-\sigma)<\Phi(\mu/\sigma)$恒成立。当$\mu>\sigma^2$时，有 $0<\mu/\sigma-\sigma<\mu/\sigma$，进而可得$\phi(\mu/\sigma-\sigma)>\phi(\mu/\sigma)$，此时有：

$$\frac{\partial\psi(\mu,\sigma)}{\partial\mu}<\frac{1}{\sigma^2}\left((\mu-\sigma^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)<0 \tag{3}$$

当 $0<\mu<\sigma^2$时，有$(\mu-\sigma^2)\Phi(\mu/\sigma-\sigma)\phi(\mu/\sigma)<0$ 和$-\mu\Phi(\mu/\sigma)\phi(\mu/\sigma-\sigma)<0$ 同时成立，此时有：

$$\frac{\partial\psi(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\left((\mu-\sigma^2)\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)-\mu\Phi\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)\phi\left(\frac{\mu}{\sigma}-\sigma\right)\right)<0 \tag{4}$$

易知函数$\rho(x)=\phi(x)/(x\Phi(x))$在 $x<0$ 时单调递减，显然当$\mu<0$ 时，有$\mu/\sigma-\sigma<\mu/\sigma<0$，由此可知$\rho(\mu/\sigma-\sigma)>\rho(\mu/\sigma)$成立，即：

$$\frac{\phi(\mu/\sigma-\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma-\sigma)(\mu/\sigma-\sigma)}>\frac{\phi(\mu/\sigma)}{\Phi(\mu/\sigma)\mu/\sigma} \tag{5}$$

调整式（5）各项在不等式中的位置，容易证明式（2）在$\mu<0$ 时恒小于 0。又有当$\mu=0$或$\mu=\sigma^2$时，相应的偏导数也小于零，由此证明式（1）关于μ的偏导数恒小于 0，即$\psi(\mu,\sigma)$在定义域上为关于μ的单调递减函数，又有：

$$\lim_{\mu\to-\infty}\frac{\partial\psi(\mu,\sigma)}{\partial\mu}=0 \tag{6}$$

故而可以证明$\psi(\mu,\sigma)<0$ 恒成立，由此可知：

$$\begin{aligned}\psi\left(\mu_{it}^*,\sigma_*\right)=&\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)\phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}-\sigma_*\right)-\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}-\sigma_*\right)\phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)\\&-\sigma_*\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}-\sigma_*\right)<0\end{aligned} \tag{7}$$

进而有：

$$\frac{1}{\sigma_*}\left(\phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}-\sigma_*\right)-\frac{\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*-\sigma_*\right)\phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*\right)}{\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*\right)}\right)-\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*-\sigma_*\right)<0 \tag{8}$$

已知$\exp\left(-\mu_{it}^*+\sigma_*^2/2\right)>0$、$\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*\right)>0$、$\sigma_v^2/\sigma^2>0$ 恒成立，自然会有：

$$sign\left(\frac{\partial TE_{it}}{\partial\boldsymbol{z_{it}}}\right)=-sign(\boldsymbol{\delta}) \tag{9}$$

附录 5：模型参数估计量大样本性质的证明过程

在当前附录部分，如果对于某个 $p \geq 1$ 而言，随机变量 t 的 p 阶绝对矩存在且有限，则称该随机变量存在L_p范数$\|t\|_p = [E|t|^p]^{1/p}$。在论述过程中，我们会频繁地使用符号 c 表示某个特定的常数，但请注意其取值会依上下文的不同而不同。

引理 1：当假设 1~5 成立时，如果存在某个 $p \geq 1$，使得$\sup_{1\leq r\leq K_1,i,t}\|x_{itr}\|_p < \infty$和$\sup_{\mathrm{i,t}}\|u_{it}\|_p < \infty$，则有$\sup_{i,t}\|y_{it}\|_p < \infty$、$\sup_{i,t}\|\boldsymbol{w_{i\cdot}}\boldsymbol{y_t}\|_p < \infty$和$\sup_{i,t,\Theta}\|\epsilon_{it}\|_p < \infty$；如果存在某个 $p \geq 2$，使得 $\sup_{1\leq r\leq K_1}\|x_{itr}\|_p < \infty$，则有 $\sup_{i,t,\Theta}\|\ln\phi((\epsilon_{it}+\mu_{it})/\sigma)\|_{p/2} < \infty$、$\sup_{i,t,\Theta}\|\ln\Phi(\mu_{it}/\sigma)\|_{p/2} < \infty$和$\sup_{i,t,\Theta}\left\|\ln\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*\right)\right\|_{p/2} < \infty$。

证明：对于矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$，定义 $abs(\boldsymbol{A}) = [|a_{ij}|]$，即对矩阵 $\boldsymbol{A}$ 逐元素取绝对值。由正文内容当中的式（4）可推知$\boldsymbol{y_t} = (\boldsymbol{I}-\rho_0\boldsymbol{W})^{-1}(\boldsymbol{X_t}\boldsymbol{\beta_0}+\boldsymbol{\epsilon_t})$，对于其中的$(\boldsymbol{I}-\rho_0\boldsymbol{W})^{-1}$而言，假设 3 保证了其纽曼展开是一个定义明确的收敛级数，由此可推知：

$$abs((\boldsymbol{I}-\rho_0\boldsymbol{W})^{-1}) = abs\left(\sum_{l=0}^{\infty}\rho_0^l\boldsymbol{W^l}\right)$$

$$\leq^* \sum_{l=0}^{\infty} abs\left(\rho_0^l\boldsymbol{W^l}\right)$$

$$= (\boldsymbol{I}-abs(\rho_0\boldsymbol{W}))^{-1}$$

式中的$\leq^*$表示逐元素不大于，即对于矩阵 $\boldsymbol{A} = [a_{ij}]$和 $\boldsymbol{B} = [b_{ij}]$而言，$\boldsymbol{A}\leq^*\boldsymbol{B}$ 意味着对于任意的 i 和 j，都会有$a_{ij} \leq b_{ij}$成立。易知$\boldsymbol{y_t}$的第 i 个元素$y_{it} = \sum_{j=1}^{N}s_{ij}\left(\boldsymbol{x_{it}^{'}}\boldsymbol{\beta_0}+v_{it}-u_{it}\right)$，其中$s_{ij}$是矩阵$(\boldsymbol{I_N}-\rho_0\boldsymbol{W})^{-1}$第 i 行第 j 列的元素，假设矩阵 $\boldsymbol{M} \equiv (\boldsymbol{I}-abs(\rho_0\boldsymbol{W}))^{-1} = [m_{ij}]$，使用 Minkowski 不等式不难推知$\sup_{i,t}\|y_{it}\|_p \leq \sup_{i,t}\sum_{j=1}^{N}m_{ij}\left(\sum_{r=1}^{K_1}\|x_{itr}\|_p|\beta_{0r}|+\|v_{it}\|_p-\|u_{it}\|_p\right)$。引理的假设条件保证了$\sup m_{ij} < \infty$、$\sup|\beta_{0r}| < \infty$、$\sup_{1\leq r\leq K_1}\|x_{itr}\|_p < \infty$、$\sup_{i,t}\|v_{it}\|_p < \infty$和$\sup_{i,t}\|u_{it}\|_p < \infty$等不等式成立，由此可得$\sup_{i,t}\|y_{it}\|_p < \infty$成立。使用类似的思路，结合 $\boldsymbol{W}$ 为行标准化后矩阵和$|\rho_0|$有界的假设条件容易推知$\sup_{i,t}\|\boldsymbol{w_{i\cdot}}\boldsymbol{y_t}\|_p < \infty$和$\sup_{i,t,\Theta}\|\epsilon_{it}\|_p < \infty$同样也会成立。

由$\phi(\cdot)$的表达式容易推知$|\ln\phi(t)| < t^2+c$，进而使用 Minkowski 不等式可推知$\sup_{i,t,\Theta}\|\ln\phi((\epsilon_{it}+\mu_{it})/\sigma)\|_{p/2} \leq \sup_{i,t,\Theta}(\|\epsilon_{it}\|_p+\|\mu_{it}\|_p)/\sigma^2+c < \infty$。根据 Xu 和 Lee（2015）的引理 A.9 中所证明的$|\ln\Phi(t)| < c(t^2+|t|+1)$，使用类似方法可以证明引理当中剩余的不等式均会成立。

引理 2：当假设 1~5 成立时，如果存在某个 $p > 4$，使得$\sup_{1\leq r\leq K_1}\|x_{itr}\|_p < \infty$，则$\{\ln\phi((\epsilon_{it}+\mu_{it})/\sigma)\}$、$\{\ln\Phi(\mu_{it}/\sigma)\}$和$\left\{\ln\Phi\left(\mu_{it}^*/\sigma_*\right)\right\}$均是关于$\{\boldsymbol{x_{it}},v_{it},u_{it}\}$的一致$L_2$-近邻相依随机场。

证明：使用拉格朗日中值定理可知$|\ln\phi(t_1)-\ln\phi(t_2)| \leq |\tilde{t}||t_1-t_2| \leq (|t_1|+|t_2|+1)|t_1-t_2|$，$|\ln\Phi(t_1)-\ln\Phi(t_2)| \leq |\phi(\dot{t})/\Phi(\dot{t})||t_1-t_2|$，其中的$\tilde{t}$和$\dot{t}$均是某个介于$t_1$和$t_2$之间的实数，由 Xu 和 Lee（2015）的引理 A.9 可知$|\phi(\dot{t})/\Phi(\dot{t})| \leq 2|t|+c$，其中 c 是某个特定的正实数，则可推知$|\ln\Phi(t_1)-\ln\Phi(t_2)| \leq c_1(|t_1|+|t_2|+1)|t_1-t_2|$，其中$c_1$是另一个特定

的正实数。使用引理 1 可以证明$\sup_{i,t}\|\boldsymbol{w_{i\cdot}}\boldsymbol{y_t}\|_p<\infty$和$\sup_{i,t,\Theta}\|\epsilon_{it}\|_p<\infty$，直接应用 Xu 和 Lee（2015）的引理 A.4，可以证明当前引理当中提及的所有关于ϵ_{it}和$\boldsymbol{w_{i\cdot}}\boldsymbol{y_t}$的函数式均为关于$\{\boldsymbol{x_{it}},v_{it},u_{it}\}$的一致$L_2$-近邻相依随机场。

命题 1：在满足假设条件 1~6 后，HSSF 模型参数的极大似然估计量$\boldsymbol{\hat{\theta}_n}$具有一致性。

证明：首先证明对数似然函数的一致收敛性，即$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}|\ln L(\boldsymbol{\theta})-E\ln L(\boldsymbol{\theta})|/(NT)=o_p(1)$，不难发现：

$$\frac{1}{NT}[\ln L(\boldsymbol{\theta})-E\ln L(\boldsymbol{\theta})]=a_1(\boldsymbol{\theta})+a_2(\boldsymbol{\theta})+a_3(\boldsymbol{\theta}) \tag{1}$$

式（1）中，有：

$$a_1(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left\{E\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)-\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}}{\sigma_u}\right)\right\},$$

$$a_2(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left\{\ln\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right)-E\ln\phi\left(\frac{\epsilon_{it}+\mu_{it}}{\sigma}\right)\right\}, \tag{2}$$

$$a_3(\boldsymbol{\theta})=\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left\{\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)-\mathrm{E}\ln\Phi\left(\frac{\mu_{it}^*}{\sigma_*}\right)\right\}$$

对于$a_1(\boldsymbol{\theta})$，由引理 1 可知$\{\ln\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)\}$一致$L_{2+l/2}$有界，又由引理 2 可知其为关于$\{\boldsymbol{x_{it}},v_{it},u_{it}\}$的一致$L_2$-近邻相依随机场，使用 Jenish 和 Prucha（2012）的定理 1 可推知$a_1(\boldsymbol{\theta})=o_p(1)$。令 $g(\boldsymbol{\theta})\equiv\mu_{it}/\sigma_u$，进而由引理 2 证明过程当中使用到的不等式$|\ln\Phi(t_1)-\ln\Phi(t_2)|\le c_1(|t_1|+|t_2|+1)|t_1-t_2|$可知：

$$\left|\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi(g(\boldsymbol{\theta_1}))-\frac{1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\ln\Phi(g(\boldsymbol{\theta_2}))\right|$$

$$\le\frac{c_1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}(|g(\boldsymbol{\theta_1})|+|g(\boldsymbol{\theta_2})|+1)|g(\boldsymbol{\theta_1})-g(\boldsymbol{\theta_2})| \tag{3}$$

$$\le\frac{c_1}{NT}\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}\left(\left|\frac{\mu_{it}(\boldsymbol{\theta_1})}{\sigma_{u1}}\right|+\left|\frac{\mu_{it}(\boldsymbol{\theta_2})}{\sigma_{u2}}\right|+1\right)\left(\left|\frac{\mu_{it}(\boldsymbol{\theta_1})}{\sigma_{u1}}\right|+\left|\frac{\mu_{it}(\boldsymbol{\theta_2})}{\sigma_{u2}}\right|\right)$$

由于$\{\mu_{it}\}$一致L_4有界，则由柯西—施瓦茨不等式可推知式（3）一致L_2有界，由此证明了$\sum_{t=1}^{T}\sum_{i=1}^{N}E\ln\Phi(\mu_{it}/\sigma_u)/(NT)$等度连续。根据 Andrews（1992）的引理 1（a）可推知$a_1(\boldsymbol{\theta})$为随机等度连续函数，进而使用 Andrews（1992）的定理 1 可证明$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}a_1(\boldsymbol{\theta})=o_p(1)$。

使用类似的方法还可以证明$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}a_2(\boldsymbol{\theta})=o_p(1)$和$\sup_{\boldsymbol{\theta}\in\Theta}a_3(\boldsymbol{\theta})=o_p(1)$，由此便证明了对数似然函数的一致收敛性。证明过程还可以推知 $E\ln L(\boldsymbol{\theta})/(NT)$具有等度连续性，加上假设 6 能够确保其在模型参数的真实值$\boldsymbol{\theta_0}$处取得最大值。两相结合便证明了命题 1 成立。

附录 6：部分情形下的参数估计精度

表 1 $\rho=0$ 时 ALS 和 S80 模型参数估计量的精确度

样本	N=25 T=25		N=50 T=25		N=100 T=25	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	0.655	1.471	0.692	0.870	0.656	0.933
	-0.483	0.895	-0.574	-0.454	-0.562	0.137
β_1	0.070	0.070	0.049	0.049	0.034	0.034
	-0.004	-0.004	0.001	0.001	-0.001	-0.001
δ_0	-	4.855	-	2.797	-	1.670
	-	-0.272	-	-1.775	-	-0.171
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	0.658	0.630	0.677	0.668	0.680	0.644
	0.647	0.391	0.672	0.640	0.676	0.580
σ_u	0.646	0.858	0.670	0.692	0.618	0.625
	-0.350	0.021	-0.466	-0.239	-0.451	-0.358
样本	N=25 T=50		N=50 T=50		N=100 T=50	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	0.692	0.870	0.656	0.933	0.598	0.670
	-0.574	-0.454	-0.562	0.137	-0.541	-0.535
β_1	0.049	0.049	0.034	0.034	0.024	0.024
	0.001	0.001	-0.001	-0.001	0.001	0.001
δ_0	-	2.797	-	1.670	-	1.278
	-	-1.775	-	-0.171	-	-1.119
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	0.677	0.668	0.680	0.644	0.686	0.688
	0.672	0.640	0.676	0.580	0.685	0.682
σ_u	0.670	0.692	0.618	0.625	0.531	0.575
	-0.466	-0.239	-0.451	-0.358	-0.424	-0.417

表 2 $\rho=0.9$ 时 ALS 和 S80 模型参数估计量的精确度

样本	N=25 T=25		N=50 T=25		N=100 T=25	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	3.462	6.069	4.487	1.826	1.809	1.287
	1.594	5.788	0.333	-0.310	-0.183	0.086
β_1	1.895	3.410	0.722	1.038	0.289	0.194
	0.506	0.561	0.170	0.168	0.085	0.096
δ_0	-	4.075	-	6.661	-	2.854
	-	-1.831	-	5.659	-	-1.688
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	5.269	5.823	4.491	3.898	1.700	1.489
	1.660	1.393	2.237	2.441	1.517	1.400
σ_u	7.643	5.299	7.984	10.720	1.106	4.453
	1.319	1.604	0.899	5.356	0.089	2.447
样本	N=25 T=50		N=50 T=50		N=100 T=50	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	7.208	4.935	1.368	0.883	1.888	1.153
	2.517	2.218	0.102	-0.325	0.094	-0.238
β_1	1.850	1.787	0.532	0.364	0.198	0.135
	0.600	0.367	0.169	0.184	0.156	-0.238
δ_0	-	2.736	-	6.957	-	6.078
	-	-1.467	-	-1.407	-	-1.607
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	4.153	3.186	2.297	2.246	1.941	1.540
	4.139	1.108	2.124	2.199	1.634	1.498
σ_u	7.787	7.869	1.804	8.974	1.358	1.849
	3.662	5.281	0.461	7.194	0.421	0.981

表 3 $\rho=0.5$ 时 HSSF、GKS 和 BC95 等模型参数估计量的精确度

样本	N=25 T=25			N=50 T=25			N=100 T=25		
模型	HSSF	GKS	BC95	HSSF	GKS	BC95	HSSF	GKS	BC95
ρ	0.066	0.049	-	0.057	0.043	-	0.035	0.031	-
	-0.002	-0.002	-	-0.002	-0.001	-	-0.001	-0.004	-
β_0	0.254	0.725	0.649	0.179	0.729	0.553	0.125	0.713	0.734
	0.085	-0.537	0.291	0.049	-0.583	0.283	0.042	-0.603	0.176
β_1	0.062	0.079	0.061	0.051	0.057	0.039	0.035	0.041	0.029
	-0.002	-0.004	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.001	0.001	0.001
δ_0	0.241	-	0.738	0.162	-	0.811	0.117	-	0.732
	0.121	-	-0.152	0.089	-	-0.084	0.062	-	-0.021
δ_1	0.134	-	0.175	0.106	-	0.139	0.068	-	0.121
	0.074	-	0.103	0.044	-	0.069	0.029	-	0.050
σ_v	0.457	0.562	1.580	0.276	0.451	1.216	0.184	0.358	0.643
	0.132	0.532	0.434	0.109	0.386	0.549	0.075	0.281	0.523
σ_u	0.444	0.747	1.625	0.364	0.714	2.699	0.271	0.750	1.164
	-0.114	-0.413	0.582	-0.074	-0.493	0.725	-0.054	-0.552	0.136
样本	N=25 T=50			N=50 T=50			N=100 T=50		
模型	HSSF	GKS	BC95	HSSF	GKS	BC95	HSSF	GKS	BC95
ρ	0.052	0.038	-	0.045	0.030	-	0.026	0.021	-
	-0.001	-0.002	-	-0.001	-0.002	-	-0.001	-0.002	-
β_0	0.158	0.674	1.432	0.138	0.692	1.451	0.088	0.658	0.834
	0.063	-0.519	0.764	0.047	-0.573	0.759	0.058	-0.582	0.543
β_1	0.058	0.058	0.041	0.036	0.037	0.038	0.023	0.015	0.015
	-0.001	0.002	0.001	-0.001	0.000	0.001	-0.001	0.001	0.001
δ_0	0.150	-	1.045	0.137	-	0.945	0.089	-	0.867
	0.096	-	-0.033	0.064	-	-0.052	0.057	-	-0.051
δ_1	0.128	-	0.178	0.089	-	0.132	0.054	-	0.173
	0.027	-	0.064	0.021	-	0.062	0.014	-	0.057
σ_v	0.293	0.435	1.693	0.166	0.332	1.496	0.099	0.254	0.653
	0.103	0.369	0.453	0.089	0.242	1.104	0.061	0.181	0.504
σ_u	0.385	0.668	1.538	0.226	0.624	1.365	0.108	0.505	0.404
	-0.083	-0.449	0.683	-0.048	-0.531	0.778	-0.036	-0.472	-0.054

表 4 $\rho=0.5$ 时 ALS 和 S80 模型参数估计量的精确度

样本	N=25 T=25		N=50 T=25		N=100 T=25	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	0.669	1.483	0.634	0.863	0.650	0.913
	-0.444	0.768	-0.492	-0.444	-0.550	0.171
β_1	0.084	0.085	0.056	0.056	0.036	0.036
	0.035	0.035	0.023	0.023	0.009	0.009
δ_0	-	4.891	-	2.927	-	1.831
	-	-0.387	-	-1.912	-	-0.147
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	0.788	0.742	0.741	0.739	0.715	0.669
	0.778	0.543	0.735	0.714	0.712	0.621
σ_u	0.662	0.910	0.610	0.708	0.611	0.623
	-0.298	0.028	-0.363	-0.196	-0.437	-0.343
样本	N=25 T=50		N=50 T=50		N=100 T=50	
模型	ALS	S80	ALS	S80	ALS	S80
ρ	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
β_0	0.613	0.849	0.643	0.982	0.594	0.676
	-0.455	-0.426	-0.536	0.244	-0.531	-0.553
β_1	0.069	0.069	0.041	0.041	0.027	0.027
	0.043	0.043	0.021	0.021	0.012	0.012
δ_0	-	3.139	-	1.829	-	1.471
	-	-2.155	-	-0.048	-	-1.267
δ_1	-	-	-	-	-	-
	-	-	-	-	-	-
σ_v	0.803	0.803	0.751	0.706	0.723	0.727
	0.797	0.779	0.747	0.644	0.721	0.722
σ_u	0.596	0.710	0.607	0.619	0.525	0.567
	-0.317	-0.117	-0.419	-0.329	-0.411	-0.383

参考文献

[1] Andrews D. Generic Uniform Convergence[J]. Econometric Theory, 1992, 8(2):241-257.
[2] Jenish N, Prucha I. On Spatial Processes and Asymptotic Inference under Near-Epoch Dependence[J]. Journal of Econometrics, 2012, 170(1): 178–190.
[3] Xu X, Lee L. Maximum Likelihood Estimation of a Spatial Autoregressive Tobit Model[J]. Journal of Econometrics, 2015, 188(1): 264–280.