

附录 A:

情形 1: 为了保证 $T_1 = 0$, 参数组合需要满足 $R_0 i_t (1 - i_t) = A_0 m^2$, 此时可以推出 $T_3 < 0$ 且 $T_2 > 0$ 。关于 b 的二次方程转化为一次方程 $T_2 b + T_3 = 0$, 理论最优解为 $\hat{b} = -T_3 / T_2$ 和 $\hat{a} = c + m T_3 / T_2$ 。不难看出 $\hat{b} \geq 0$, 而 $\hat{a}$ 的符号不能确定。为了使得 $\hat{a} \geq 0$, c 和 m 需满足 $c + m \geq 1$ 。下面根据该条件是否成立分别讨论。

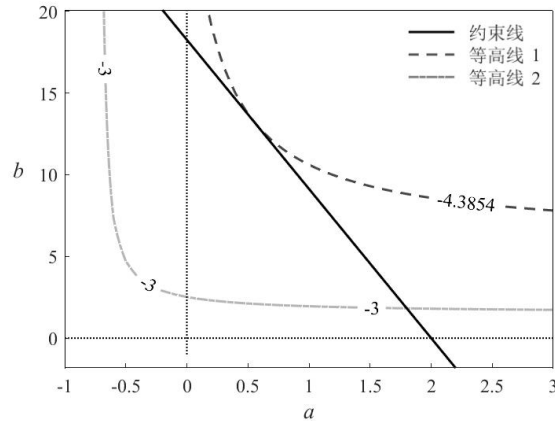


图 1 情形 1 (1) 的数值算例

(1) 当 $c + m \geq 1$ 时, 有 $\hat{a} \geq 0$, 此时优化问题的实际最优解等于理论最优解: $a^* = \hat{a}$, $b^* = \hat{b}$, 下一期的最小感染率 $i_{t+1}^* = 4A_0 m^2 / (c + m + 1) + (1 - \mu)i_t - A_0 m$ 。图 1 给出数值算例, 例如当 $A_0 = 50$, $R_0 = 2.5$, $\mu = 0.2$, $i_t = 0.40$, $m = 0.1095$, $c = 2$ 时满足 $R_0 i_t (1 - i_t) = A_0 m^2$ 且 $c + m \geq 1$, 目标函数的等高线和资源约束直线的切点在第一象限, 有 $a^* = 0.55$, $b^* = 13.19$, 即医疗物资在民众和医院中合理分配可以使得下一期感染比例达到最小。

(2) 当 $c + m < 1$ 时, 有 $\hat{a} < 0$, 此时优化问题的实际最优解只能取到可行域的边界: $a^* = 0$, $b^* = c / m$, 下一期的最小感染率 $i_{t+1}^* = R_0 i_t (1 - i_t) - A_0 m c / (c + m) + (1 - \mu)i_t$ 。图 2 给出数值算例, 例如当 $A_0 = 50$, $R_0 = 2.5$, $\mu = 0.2$, $i_t = 0.40$, $m = 0.1095$, $c = 0.4$ 时满足 $R_0 i_t (1 - i_t) = A_0 m^2$ 且 $c + m < 1$, 目标函数的等高线和资源约束直线的切点在第二象限, 有 $\hat{a} = -0.25$, $\hat{b} = 5.90$, 理论最优解并不是可行解。等高线继续向左下方移动, 可以得到实际最优解 $a^* = 0$, $b^* = 3.65$, 即医疗物资全部提供给医护人员, 可以使得下一期感染比例达到最小。

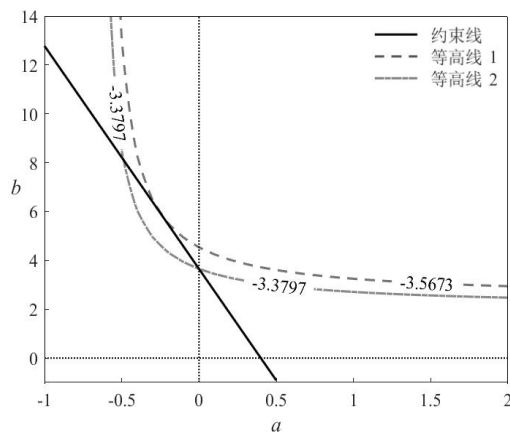


图 2 情形 1 (2) 的数值算例

情形 3: 为了保证 $T_1 > 0$ 且 $T_3 < 0$, 参数组合需要满足 $A_0 m^2 < R_0 i_t (1-i_t) < A_0 (c+1)^2$ 。此时优化问题同样有两组最优解, 其表达式与情形 2 相同。可以验证第二组解中 $\hat{a}_2 > 0$ 且 $\hat{b}_2 < 0$, 不符合实际意义。第一组解中 $\hat{b}_1 > 0$, 但是 $\hat{a}_1$ 的符号不能确定。为了使得 $\hat{a}_1 \geq 0$ 需要满足 $(c+m)^2 R_0 i_t (1-i_t) \geq A_0 m^2$, 下面根据该条件是否成立分别讨论。

(1) 当 $(c+m)^2 R_0 i_t (1-i_t) \geq A_0 m^2$ 时, 有 $\hat{a}_1 \geq 0$, 此时实际最优解等于理论最优解: $a^* = \hat{a}_1$, $b^* = \hat{b}_1$, 且 $i_{t+1}^* = \left[\sqrt{R_0 i_t (1-i_t)} + m \sqrt{A_0} \right]^2 / (c+1+m) + (1-\mu)i_t - A_0 m$ 。图 3 给出数值算例, 例如当 $A_0 = 50$, $R_0 = 2.5$, $\mu = 0.2$, $i_t = 0.40$, $m = 0.01$, $c = 0.8$, 时满足 $A_0 m^2 < R_0 i_t (1-i_t) < A_0 (c+1)^2$ 和 $(c+m)^2 R_0 i_t (1-i_t) \geq A_0 m^2$, 目标函数的等高线和资源约束直线的两个切点分别在第一象限和第四象限, 两组理论最优解为 $\hat{a}_1 = 0.66$, $\hat{b}_1 = 14.19$ 和 $\hat{a}_2 = 0.98$, $\hat{b}_2 = -19.1$ 。第二组解不符合实际意义, 而第一组解成为实际最优解, 即医疗物资在民众和医院中合理分配可以使得下一期感染比例达到最小。

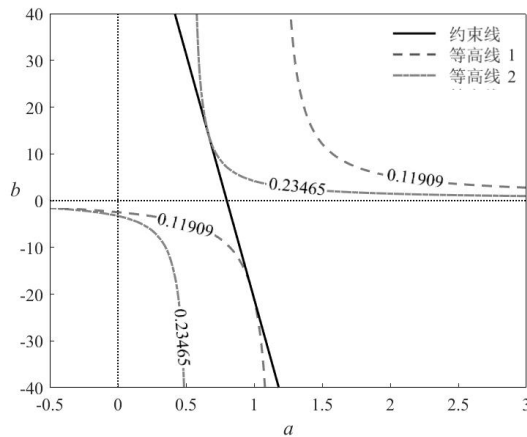


图 3 情形 3 (1) 的数值算例

(2) 当 $(c+m)^2 R_0 i_t (1-i_t) < A_0 m^2$ 时, 有 $\hat{a}_1 < 0$ 且 $\hat{b}_1 > 0$ 。实际最优解只能取到可行域的边界: $a^* = 0$, $b^* = c/m$, 下期最小感染率 $i_{t+1}^* = R_0 i_t (1-i_t) - A_0 m c / (c+m) + (1-\mu)i_t$ 。图 4 给出数值算例, 例如, 当 $A_0 = 50$, $R_0 = 2.5$, $\mu = 0.2$, $i_t = 0.40$, $m = 0.1$, $c = 0.1$ 时满足 $A_0 m^2 < R_0 i_t (1-i_t) < A_0 (c+1)^2$ 和 $(c+m)^2 R_0 i_t (1-i_t) < A_0 m^2$, 目标函数的等高线和资源约束直线的切点分别在第二象限和第四象限, 两组最优解为 $\hat{a}_1 = -0.37$, $\hat{b}_1 = 4.71$ 和 $\hat{a}_2 = 13.61$, $\hat{b}_2 = -134.39$ 。两组解均不符合实际意义, 等高线继续向左下方移动, 可以得到实际最优解 $a^* = 0$, $b^* = 0.99$, 即医疗物资全部分配给医护人员, 可以使得下一期感染比例达到最小。

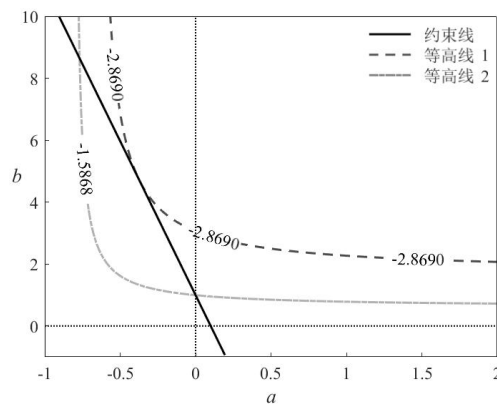


图 4 情形 3 (2) 的数值算例

情形 4：为了保证 $T_1 > 0$ 且 $T_3 \geq 0$ ，参数组合需要满足 $R_0 i_t (1 - i_t) \geq A_0 (c + 1)^2$ 。此时优化问题同样有两组最优解，其表达式与情形 2 相同。可以验证两组解中有 $\hat{b}_1 < 0$ 和 $\hat{b}_2 < 0$ ，此时实际最优解只能取到可行域的边界： $a^* = c$ ， $b^* = 0$ ，下一期的最小感染率 $i_{t+1}^* = R_0 i_t (1 - i_t) / (c + 1) + (1 - \mu) i_t$ 。图 5 给出数值算例，例如当 $A_0 = 1$ ， $R_0 = 15$ ， $\mu = 0.2$ ， $i_t = 0.40$ ， $m = 0.33$ ， $c = 0.4$ 时满足 $R_0 i_t (1 - i_t) \geq A_0 (c + 1)^2$ ，目标函数的等高线和资源约束直线的两个切点均在第四象限，两组最优解为 $\hat{a}_1 = 0.48$ ， $\hat{b}_1 = -0.24$ 和 $\hat{a}_2 = 1.10$ ， $\hat{b}_2 = -2.19$ 。两组解均不符合实际意义，等高线继续向左下方移动，可以得到实际最优解 $a^* = 0.4$ ， $b^* = 0$ ，即医疗物资全部分配给民众，可以使得下一期感染比例达到最小。

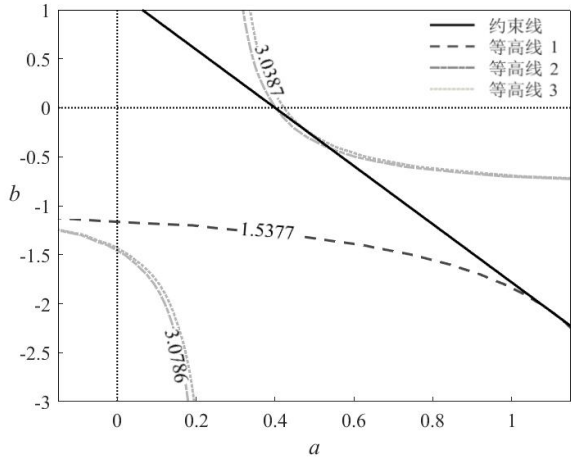


图 5 情形 4 的数值算例

附录 B：

情形 2（疫情相对可控的情形）：其中，情形 2（1）要求 c/m 较大，而情形 2（2）要求 c/m 较小。表 1 给出不同参数组合下的分析情况，这里人均医护人员的数量要比情形 1 更多，虽然情形 2（1）的物资比情形 2（2）更为丰富，但是情形 2（1）和情形 2（2）都可以使得感染比例在第二期下降为 0。同样地，类似于情形 1，情形 2 也对应于医疗水平较高而且人均医护人员数量较多的地区。

表 1 情形 2 中不同参数组合的分析

	i_1	R_0	μ	A_0	m	c	a_1	b_1	i_2	i_∞
情形 2（1）										
(a)	0.001	2.5	0.2	100	0.0060	1.2	0.0027	199.6365	0	0
(b)	0.001	2.5	0.2	50	0.0081	1.2	0.0311	144.8909	0	0
(c)	0.001	2.5	0.2	10	0.0168	1.2	0.0744	66.9856	0	0
(d)	0.001	2.5	0.2	1	0.0510	1.2	0.1143	21.2979	0	0
(e)	0.001	2.5	0.2	0.1	0.1590	1.2	0.1758	6.4401	0	0
情形 2（2）										
(a)	0.001	2.5	0.2	100	0.0060	0.5	0	83.3681	0	0
(b)	0.001	2.5	0.2	50	0.0081	0.5	0	61.9768	0	0
(c)	0.001	2.5	0.2	10	0.0168	0.5	0	29.7557	0	0
(d)	0.001	2.5	0.2	1	0.0510	0.5	0	9.8087	0	0
(e)	0.001	2.5	0.2	0.1	0.1590	0.5	0	3.1440	0	0

附录 C:

情形 4(疫情不可控的情形): 表 2 给出不同参数组合下的分析情况,可以看出 $R_0 i_t (1-i_t)$ 是个相对较小的值,这就要求 A_0 和 c 都很小,或者 i_t 本身较大。这里的求解是将医疗物资全部分配给民众,而且第二期的感染比例仍然会剧烈上升,最终的感染比例可能维持在很高的水平上(长期趋势见图 6)。情形 4 对应于疫情几乎完全失控的地区。

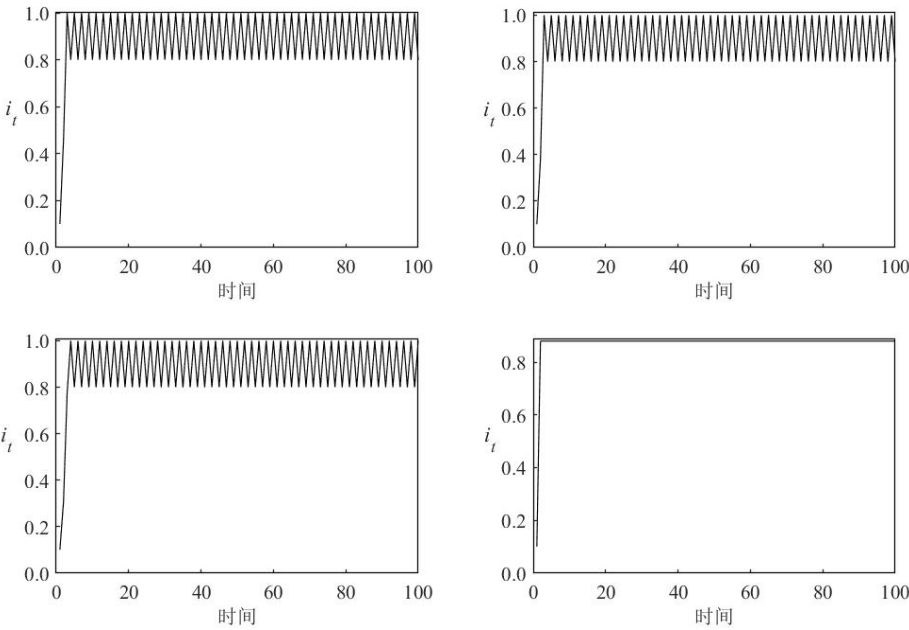


图 6 表 2 中参数组合感染比例的长期趋势(从左而右,自上而下分别是参数组合(a)~(d))

表 2 情形 4 中不同参数组合的分析

	i_1	R_0	μ	A_0	m	c	a_1	b_1	i_2	i_∞
(a)	0.1	5	0.2	0.1	0.001	0.2	0.2	0	0.4550	0.8000~1
(b)	0.1	4	0.2	0.1	0.001	0.2	0.2	0	0.3800	0.8000~1
(c)	0.1	3	0.2	0.1	0.001	0.2	0.2	0	0.3050	0.8000~1
(d)	0.1	2	0.2	0.1	0.001	0.2	0.2	0	0.2300	0.8800