

为简化证明，令  $\pi(1, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) = \pi(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})$ ， $\pi(0, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) = 1 - \pi(\mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})$ 。令  $K = 1$ 。本文证明可拓展至处理变量为多分类的情况。

$\varepsilon(F_{1,\boldsymbol{\beta}}, F)$  和  $\varepsilon(F_{0,\boldsymbol{\beta}}, F)$  可统一表示如下，其中  $k$  取 0 或者 1。

$$\begin{aligned} \varepsilon(F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}, F) &= 2E_i E_j \frac{I(A_i = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) E[I(A_i = k) / \pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})]} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &\quad - E_i E_j \frac{I(A_i = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) E[I(A_i = k) / \pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})]} \frac{I(A_j = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_j; \boldsymbol{\beta}) E[I(A_j = k) / \pi(k, \mathbf{X}_j; \boldsymbol{\beta})]} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &\quad - E_i E_j \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \end{aligned} \quad (\text{S1})$$

将期望替换成样本均值，可得经验分布间的能源距离，即：

$$\begin{aligned} \varepsilon(F_{n,k,w_{\boldsymbol{\beta}}}, F) &= 2E_{n,i} E_{n,j} \frac{I(A_i = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) E_n[I(A_i = k) / \pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})]} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &\quad - E_{n,i} E_{n,j} \frac{I(A_i = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta}) E_n[I(A_i = k) / \pi(k, \mathbf{X}_i; \boldsymbol{\beta})]} \frac{I(A_j = k)}{\pi(k, \mathbf{X}_j; \boldsymbol{\beta}) E_n[I(A_j = k) / \pi(k, \mathbf{X}_j; \boldsymbol{\beta})]} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &\quad - E_{n,i} E_{n,j} \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \end{aligned} \quad (\text{S2})$$

## 附录 1：引理 1 的证明

令  $\mathbf{X}$  的密度函数为  $f(x)$ ，分布  $F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x)$  的密度函数为  $f_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x)$ 。推导可知  $F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x)$  等价于：

$$\begin{aligned} F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x) &= E \left[ \frac{I(A = k) I(\mathbf{X} \leq x)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}) E[I(A = k) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]} \right] \\ &= E \left[ \frac{\pi_0(k, \mathbf{X}) I(\mathbf{X} \leq x)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}) E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]} \right] \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{\pi_0(k, x) f(x)}{\pi(k, x; \boldsymbol{\beta}) E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]} dx \end{aligned}$$

求 1 阶导可得  $f_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x) = \frac{\pi_0(k, x) f(x)}{\pi(k, x; \boldsymbol{\beta}) E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]}$ 。该分布的特征函数为

$$\varphi_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \frac{\pi_0(k, x) f(x)}{\pi(k, x; \boldsymbol{\beta}) E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]} dx = E \left[ \frac{\pi_0(k, \mathbf{X}) e^{it\mathbf{X}}}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}) E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]} \right]$$

令协变量  $\mathbf{X}$  的特征函数为  $\varphi(t)$ 。由 Székely 和 Rizzo (2013) 的命题 1 可知，分布  $F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(x)$  和分布

$F(x)$  的能源距离为  $\varepsilon(F_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}, F) = \frac{1}{c_d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\varphi_{k,w_{\boldsymbol{\beta}}}(t) - \varphi(t)|^2}{|t|_d^{d+1}} dt$ ，其中  $|A|^2 = A\bar{A}$ ， $\bar{A}$  代表复数共轭，

$c_d = \frac{\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma((d+1)/2)}$ ， $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数。

接下来推导  $F_{k,w_\beta}(x)$  和  $F(x)$  的能源距离的形式。不失一般化，此处仅证明  $d=1$  的情形。令  $\mathbf{X}'$  与  $\mathbf{X}$  独立同分布。

$$\begin{aligned} |\varphi_{k,w_\beta}(t) - \varphi(t)|^2 &= \varphi(t)\overline{\varphi(t)} + \varphi_{k,w_\beta}(t)\overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)} - \varphi(t)\overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)} - \overline{\varphi(t)}\varphi_{k,w_\beta}(t) \\ &= (1 - \varphi(t)\overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)}) + (1 - \overline{\varphi(t)}\varphi_{k,w_\beta}(t)) - (1 - \varphi(t)\overline{\varphi(t)}) - (1 - \overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)}\varphi_{k,w_\beta}(t)) \end{aligned}$$

从而有：

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(t)\overline{\varphi(t)} &= 1 - Ee^{it\mathbf{X}}Ee^{-it\mathbf{X}'} = 1 - Ee^{it(\mathbf{X}-\mathbf{X}')} = 1 - E[\cos(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}')) + i\sin(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))] \\ &= 1 - E[\cos(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))] - iE[\sin(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))] \\ &= 1 - E[\cos(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))] + V_1 \end{aligned}$$

其中  $V_1$  这项在后面求积分的过程中会被抵消掉。

同理可得：

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(t)\overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)} &= 1 - \overline{\varphi(t)}\varphi_{k,w_\beta}(t) = 1 - E\left\{\frac{\cos(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))\pi_0(k, \mathbf{X})}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]}\right\} + V_2 \\ 1 - \overline{\varphi_{k,w_\beta}(t)}\varphi_{k,w_\beta}(t) &= 1 - E\left\{\frac{\cos(t(\mathbf{X}-\mathbf{X}'))\pi_0(k, \mathbf{X})\pi_0(k, \mathbf{X}')}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})E[\pi_0(k, \mathbf{X}) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]\pi(k, \mathbf{X}'; \boldsymbol{\beta})E[\pi_0(k, \mathbf{X}') / \pi(k, \mathbf{X}'; \boldsymbol{\beta})]}\right\} + V_3 \end{aligned}$$

其中  $V_2$  和  $V_3$  在后面求积分的过程中均会被抵消掉。

基于 Székely 和 Rizzo (2013) 的引理 1 对上述各项进行转化，加总即可得证。

## 附录 2：引理 2 的证明

由于分布间的能源距离均大于等于 0，从而对任意  $\boldsymbol{\beta} \in \Theta$ ，有  $Q(\boldsymbol{\beta}) \geq 0$ 。

当  $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0$  时， $F_{k,w_{\beta_0}}(x) = E\left[\frac{I(A=k, \mathbf{X} \leq x)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}_0)E[I(A=k) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta}_0)]}\right] = E[I(\mathbf{X} \leq x)] = F(x)$ 。从而当

$k=0$  或  $1$  时有  $\varepsilon(F_{k,w_{\beta_0}}, F_x) = 0$ ，进而有  $Q(\boldsymbol{\beta}_0) = \sum_{k=0}^K \varepsilon(F_{k,w_{\beta_0}}, F) = 0$ 。

当  $Q(\boldsymbol{\beta}) = 0$  时，鉴于  $\varepsilon(F_{k,w_\beta}, F) \geq 0$ ，对  $k$  等于 0 和 1 均有  $\varepsilon(F_{k,w_\beta}, F) = 0$  成立。从而有

$F_{k,w_\beta}(x) = F(x)$ ，即  $E\left[\frac{I(A=k)I(\mathbf{X} \leq x)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})E[I(A=k) / \pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})]}\right] = E[I(\mathbf{X} \leq x)]$ 。基于迭代期望定理，几

乎处处有：

$$E\left[\frac{I(A=k)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})} \middle| \mathbf{X}\right] = E\left[\frac{I(A=k)}{\pi(k, \mathbf{X}; \boldsymbol{\beta})}\right]$$

上式等价于  $\frac{\pi_0(k, X)}{\pi(k, X; \beta)} = E \left[ \frac{\pi_0(k, X)}{\pi(k, X; \beta)} \right]$ 。从而存在常数  $c_0, \dots, c_k$ ，满足  $\pi_0(k, X) = c_k \pi(k, X; \beta)$ 。由于倾向得分加和等于 1，即  $\sum_{k=0}^1 \pi_0(k, X) = \sum_{k=0}^1 c_k \pi(k, X; \beta) = 1$ ，同时  $\sum_{k=0}^1 \pi(k, X; \beta) = 1$ 。鉴于  $\pi(k, X; \beta) \geq 0$ ，从而有  $c_0 = c_1 = 1$ 。相应地， $\pi_0(k, X) = \pi(k, X; \beta)$ ，即  $\beta = \beta_0$ 。得证。

### 附录 3：定理 1 的证明

首先证明  $\hat{\beta} - \beta_0 = o_p(1)$ 。此处采用 van der Vaart (1998) 的 Theorem 5.7 证明  $\hat{\beta}$  的相合性。由于  $Q(\beta)$  关于  $\beta$  连续，在  $\beta = \beta_0$  处有唯一最小值且  $\Theta$  为紧致集，基于 van der Vaart (1998) 的练习 5.27 有，对任意  $\varepsilon > 0$ ，有：

$$\inf_{\beta: \|\beta - \beta_0\| \geq \varepsilon} Q(\beta) > Q(\beta_0)$$

从而只需再证明：

$$\sup_{\beta \in \Theta} |Q_n(\beta) - Q(\beta)| \xrightarrow{p} 0$$

令集合  $F_1 = \left\{ (A, X) \in \{0, \dots, K\} \times \mathcal{X} \mapsto \frac{I(A=k)}{\pi(k, X; \beta)} : \beta \in \Theta \right\}$ ， $F_2 = \left\{ X \in \mathcal{X} \mapsto I(X \leq x) : x \in [-\infty, +\infty]^d \right\}$ ， $F_3 = F_1 \cdot F_2$ 。由 Sant' Anna 等 (2022) 的引理 B.1 及引理 B.2 可知，集合  $F_1$ ， $F_2$  和  $F_3$  均为 Glivenko-Cantelli class，从而  $\sup_{\beta \in \Theta} |Q_n(\beta) - Q(\beta)| \xrightarrow{p} 0$ ， $\hat{\beta}$  的相合性得证。

由于  $\beta_0$  在  $Q(\beta)$  取唯一最小值，一阶导等于零，即  $\partial Q(\beta) / \partial \beta = \sum_{k=0}^1 \partial \varepsilon(F_{k, w_\beta}, F) / \partial \beta = 0$ 。令

$\varphi(k, A, X; \beta) = \frac{I(A=k) / \pi(k, X; \beta)}{E[I(A=k) / \pi(k, X; \beta)]}$ 。令函数上加“ $\cdot$ ”代表该函数基于参数  $\beta$  求一阶导。从而

$\varphi(k, A, X; \beta)$  基于参数  $\beta$  求一阶导有：

$$\dot{\varphi}(k, A, X; \beta) = -\frac{\varphi(k, A, X; \beta) \dot{\pi}(k, X; \beta)}{\pi(k, X; \beta)} + \varphi(k, A, X; \beta) E \left[ \frac{\dot{\varphi}(k, A, X; \beta) \dot{\pi}(k, X; \beta)}{\pi(k, X; \beta)} \right]$$

推导可得：

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(F_{k, w_\beta}, F)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 2E_i E_j \dot{\varphi}(k, A_i, X_i; \beta_0) \|X_i - X_j\|_2 - 2E_i E_j \dot{\varphi}(k, A_i, X_i; \beta_0) \varphi(k, A_j, X_j; \beta_0) \|X_i - X_j\|_2$$

令  $U_k(X_j; \beta) = E_i \left\{ \dot{\varphi}(k, A_i, X_i; \beta) \|X_i - X_j\|_2 \right\}$ ，上式可化简为：

$$\left. \frac{\partial \mathcal{E}(F_{k,w_\beta}, F)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\beta_0} = 2E_j(U_k(\mathbf{X}_j; \beta_0)) - 2E_j\{U_k(\mathbf{X}_j; \beta_0)\varphi(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0)\}$$

从而有：

$$\sum_{k=0}^1 \{E_j(U_k(\mathbf{X}_j; \beta_0)) - E_j\{U_k(\mathbf{X}_j; \beta_0)\varphi(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0)\}\} = 0 \quad (\text{S3})$$

由于  $\hat{\beta}$  在  $Q_n(\beta)$  取最小值，一阶导等于零，从而  $\partial Q_n(\beta) / \partial \beta = \sum_{k=0}^1 \partial \mathcal{E}(F_{n,k,w_\beta}, F_n) / \partial \beta = 0$ 。

令  $\varphi_n(k, A, \mathbf{X}; \beta) = \frac{I(A=k) / \pi(k, \mathbf{X}; \beta)}{E_n[I(A=k) / \pi(k, \mathbf{X}; \beta)]}$ 。  $\varphi_n(k, A, \mathbf{X}; \beta)$  基于  $\beta$  求一阶导有：

$$\dot{\varphi}_n(k, A, \mathbf{X}; \beta) = -\frac{\varphi_n(k, A, \mathbf{X}; \beta) \dot{\pi}(k, \mathbf{X}; \beta)}{\pi(k, \mathbf{X}; \beta)} + \varphi_n(k, A, \mathbf{X}; \beta) E_n \left[ \frac{\dot{\varphi}_n(k, A, \mathbf{X}; \beta) \dot{\pi}(k, \mathbf{X}; \beta)}{\pi(k, \mathbf{X}; \beta)} \right]$$

推导可得：

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{E}(F_{n,k,w_\beta}, F_n)}{\partial \beta} \right|_{\beta=\hat{\beta}} &= 2E_{n,i}E_{n,j} \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 - 2E_{n,i}E_{n,j} \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \varphi_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \hat{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &= 2E_{n,i}E_{n,j} \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &\quad - 2E_{n,i}E_{n,j} \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) (\varphi_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0) + \dot{\varphi}_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \tilde{\beta})(\hat{\beta} - \beta_0)) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \\ &= 2E_{n,i}E_{n,j} \left\{ \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 - \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \varphi_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \right\} \\ &\quad - 2E_{n,i}E_{n,j} \left\{ \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \dot{\varphi}_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \tilde{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \right\} (\hat{\beta} - \beta_0) \end{aligned} \quad (\text{S4})$$

其中  $\tilde{\beta}$  介于  $\hat{\beta}$  与  $\beta_0$  之间。上式的第二个等式是将  $\varphi_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \hat{\beta})$  基于  $\beta_0$  展开。

令集合  $F_4 = \left\{ (A, \mathbf{X}) \in \{0, \dots, K\} \times \mathcal{X} \mapsto \frac{I(A=k)}{\pi(k, \mathbf{X}; \beta)} \dot{\pi}(k, \mathbf{X}; \beta) : \beta \in \Theta \right\}$ ，  $F_5 = F_4 \cdot F_2$ 。由 Sant' Anna

等（2022）的引理 B.3 可知  $F_4$  和  $F_5$  均为 Glivenko-Cantelli class。

鉴于  $\hat{\beta} - \beta_0 = o_p(1)$ ，基于上述 Lemma B.3 和连续映射定理有：

$$\begin{aligned} E_{n,i}E_{n,j} \left\{ \dot{\varphi}_n(k, A_i, \mathbf{X}_i; \hat{\beta}) \dot{\varphi}_n(k, A_j, \mathbf{X}_j; \tilde{\beta}) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \right\} &= E_i E_j \left\{ \dot{\varphi}(k, A_i, \mathbf{X}_i; \beta_0) \dot{\varphi}(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0) \|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2 \right\} + o_p(1) \\ &= E_j \left\{ U_k(\mathbf{X}_j; \beta_0) \dot{\varphi}(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0) \right\} + o_p(1) \end{aligned} \quad (\text{S5})$$

其中上式第二个等式源于  $U_k(\mathbf{X}_j; \beta)$  的定义。

基于  $\varphi(k, A, \mathbf{X}; \beta)$  的定义有  $E(1 - \varphi(k, A_j, \mathbf{X}_j; \beta_0)) = 0$ 。推导可得：

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{n} \sum_{k=0}^1 E_{n,i} E_{n,j} \left\{ \dot{\varphi}_n(k, A_i, X_i; \hat{\beta}) \|X_i - X_j\|_2 - \varphi_n(k, A_i, X_i; \hat{\beta}) \varphi_n(k, A_j, X_j; \beta_0) \|X_i - X_j\|_2 \right\} \\
 &= \sqrt{n} \sum_{k=0}^1 E_{n,i} E_{n,j} \left\{ \dot{\varphi}_n(k, A_i, X_i; \hat{\beta}) (1 - \varphi_n(k, A_j, X_j; \beta_0)) \|X_i - X_j\|_2 \right\} \\
 &= \sqrt{n} \sum_{k=0}^1 E_{n,j} \left\{ E_i \left\{ \dot{\varphi}(k, A_i, X_i; \beta_0) \|X_i - X_j\|_2 \right\} (1 - \varphi(k, A_j, X_j; \beta_0)) \right\} + o_p(1) \\
 &= \sqrt{n} \sum_{k=0}^1 E_{n,j} \left\{ U_k(X_j; \beta_0) (1 - \varphi(k, A_j, X_j; \beta_0)) \right\} + o_p(1) \\
 &= \sqrt{n} \sum_{k=0}^1 E_j \left\{ U_k(X_j; \beta_0) (1 - \varphi(k, A_j, X_j; \beta_0)) \right\} + O_p(1) \\
 &= O_p(1)
 \end{aligned} \tag{S6}$$

其中 (S6) 第二个等式源于式 (S5)，第三个等式源于  $U_k(X_j; \beta)$  的定义，第四个等式源于中心极限定理，第五个等式源于式 (S3)。

基于  $\partial Q_n(\beta) / \partial \beta = \sum_{k=0}^1 \partial \varepsilon(F_{n,k,w_p}, F_n) / \partial \beta = 0$  可得  $\beta$  的表达式。基于式 (S4) 和 (S6)，可得

$\hat{\beta} - \beta_0 = O_p(1/\sqrt{n})$ 。从而得证。

#### 附录 4：定理 2 的证明

令  $\tau(k) = E(Y^k)$ ，从而  $\tau = \tau(1) - \tau(0)$ 。令  $\hat{\tau}(k) = E_n \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \hat{\beta}) E_n[I(A=k) / \pi(k, X; \hat{\beta})]} \right)$ ，从而

$\hat{\tau} = \hat{\tau}(1) - \hat{\tau}(0)$ 。由于

$$\hat{\tau}(k) = E_n \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \hat{\beta}) E_n[I(A=k) / \pi(k, X; \hat{\beta})]} \right) = E_n \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \hat{\beta})} \right) / E_n[I(A=k) / \pi(k, X; \hat{\beta})]$$

推导可得：

$$E_n \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \hat{\beta})} \right) = E_n \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \beta_0)} \right) + O_p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = E \left( \frac{I(A=k)Y}{\pi(k, X; \beta_0)} \right) + O_p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \tau(k) + O_p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

同理可得  $E_n[I(A=k) / \pi(k, X; \hat{\beta})] = 1 + O_p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ 。从而有  $\hat{\tau}(k) = \tau(k) + O_p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ ，得证。

#### 参考文献

- [1] Sant' Anna P, Song X, Xu Q. Covariate distribution balance via propensity scores [J]. Journal of Applied Econometrics, 2022, 37(6): 1093-1120.
- [2] van der Vaart, A. Asymptotic Statistics [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1998.