

附录 A

引理 1：在假设 1~2 下，有：

$$E_T(r) \xRightarrow{d} \omega \underline{B}_\sigma(r) + \sqrt{T}c \left(\int_0^r \sigma(s) ds - r \int_0^1 \sigma(s) ds \right), \quad r \in (0,1]$$

其中， $\omega^2 = \xi^2 \int_0^1 \sigma^2(s) ds$ ， $\underline{B}_\sigma(r) = B_\sigma(r) - r B_\sigma(1)$ ， $B_\sigma(r) = \left[\int_0^1 \sigma^2(s) ds \right]^{-1/2} \int_0^r \sigma(s) dB(s)$ ， $B(\cdot)$ 为标准布朗运动。在原假设下，进一步有： $E_T(r) \xRightarrow{d} \omega \underline{B}(r)$ ，这里 $\underline{B}(r) = B(r) - r B(1)$ 为标准布朗桥以及 $\omega = \xi \sigma_0$ 。

证明：令 $\bar{\sigma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sigma_t$ ，将 $\tilde{e}_t$ 改写为：

$$\tilde{e}_t = e_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t + c(\sigma_t - \bar{\sigma}) \quad (1)$$

对于 $r \in (0,1]$ ，则有：

$$\begin{aligned} E_T(r) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \left[e_t - \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t + c(\sigma_t - \bar{\sigma}) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} e_t - \frac{[Tr]}{T} \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^T e_t + \frac{c}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} \sigma_t - \frac{c[Tr]}{\sqrt{T}} \bar{\sigma} \end{aligned} \quad (2)$$

在正文假设 1~2 下，依据 Cavaliere (2005) 的引理 1，可证明：

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{t=1}^{[Tr]} e_t \xRightarrow{d} \omega B_\sigma(r), \quad r \in (0,1], \quad \text{以及} \quad \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{[Tr]} \sigma_t \Rightarrow \int_0^r \sigma(s) ds$$

因此，有：

$$E_T(r) \xRightarrow{d} \omega \underline{B}_\sigma(r) + \sqrt{T}c \left[\int_0^r \sigma(s) ds - r \int_0^1 \sigma(s) ds \right] \quad (3)$$

在原假设下，进一步可得 $E_T(r) \xRightarrow{d} \omega \underline{B}(r)$ ，其中， $\omega = \xi \sigma_0$ 。■

引理 2：在原假设和备择假设下， $\hat{\omega}^2 \xrightarrow{p} \omega^2$ 。

证明：首先，在 t/T 点处，对 $g(s/T)$ 进行二阶泰勒展开可得：

$$g(s/T) = g\left(\frac{t}{T}\right) + g'\left(\frac{t}{T}\right) \frac{s-t}{T} + \frac{1}{2} g''\left(\frac{\bar{t}}{T}\right) \left(\frac{s-t}{T}\right)^2, \quad s=1,2,\dots,T \quad (4)$$

其中， $g'(\cdot)$ 和 $g''(\cdot)$ 分别是 $g(\cdot)$ 的一阶和二阶导数，并且还有 $\bar{t} = \lambda t + (1-\lambda)s$ ， $\lambda \in [0,1]$ 。令：

$$S_i = \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T k_h \left(\frac{s-t}{Th} \right) \left(\frac{s-t}{Th} \right)^i \rightarrow \begin{cases} \int_{-c}^1 u^i k(u) du, & t = c[Th] (0 < c < 1) \\ \int_{-1}^1 u^i k(u) du, & [Th] \leq t \leq T - [Th] \\ \int_{-1}^c u^i k(u) du, & t = T - c[Th] (0 < c < 1) \end{cases} \quad (5)$$

基于正文 (6) 式和泰勒展开，可得：

$$\hat{g}_t - g_t \rightarrow h S_0^{-1} S_1 g'(t/T) + \frac{h^2}{2} S_0^{-1} S_2 g''(t/T) + S_0^{-1} \frac{1}{T} \sum_{s=1}^T k_h \left(\frac{s-t}{Th} \right) e_s \quad (6)$$

利用 $\int_{-1}^1 k(u) du = 1$ ， $\int_{-1}^1 u k(u) du = 0$ 以及 $\frac{1}{\sqrt{Th}} \sum_{s=1}^T k \left(\frac{s-t}{Th} \right) e_s = O_p(1)$ ，进一步可证明：

$$E(\hat{g}_t - g_t)^2 = \begin{cases} O\left(h^2 + \frac{1}{Th}\right), \frac{t}{T} \in [0, h) \\ O\left(h^4 + \frac{1}{Th}\right), \frac{t}{T} \in [h, 1-h] \\ O\left(h^2 + \frac{1}{Th}\right), \frac{t}{T} \in (1-h, 1] \end{cases} \quad (7)$$

令 $\tilde{\gamma}(j) = T^{-1} \sum_{t=j+1}^T e_t e_{t-j}$ ，则有：

$$\begin{aligned} |\hat{\gamma}(j) - \tilde{\gamma}(j)| &\leq \left| T^{-1} \sum_{t=j+1}^T e_t (\hat{g}_{t-j} - g_{t-j}) \right| + \left| T^{-1} \sum_{t=j+1}^T e_{t-j} (\hat{g}_t - g_t) \right| \\ &+ \left| T^{-1} \sum_{t=j+1}^T (\hat{g}_t - g_t)(\hat{g}_{t-j} - g_{t-j}) \right| = A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned} \quad (8)$$

对于 A_1 ，运用柯西斯瓦兹不等式可证得：

$$\begin{aligned} E(A_1) &\leq T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \left[E(e_t^2) E(\hat{g}_{t-j} - g_{t-j})^2 \right]^{1/2} \\ &\leq \left(\sup_t \sigma_t \right) \left[E(e_t^2) + c^2 \right]^{1/2} T^{-1} \sum_{t=j+1}^T \left[E(\hat{g}_s - g_s)^2 \right]^{1/2} \\ &\leq CT^{-1} \left(\sum_{s=1}^{[Th]-1} + \sum_{s=[Th]}^{T-[Th]} + \sum_{s=[Th]+1}^T \right) \left[E(\hat{g}_s - g_s)^2 \right]^{1/2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{Th}} + h^2 \right) \end{aligned} \quad (9)$$

因此，可得 $A_1 = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{Th}} + h^2 \right)$ 。运用同样的方式，可以证明 $A_2 = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{Th}} + h^2 \right)$ 以及

$A_3 = O_p\left(h^4 + \frac{1}{Th} \right)$ 。基于上述分析，对于所有 $j \geq 0$ ，都有 $|\hat{\gamma}(j) - \tilde{\gamma}(j)| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{Th}} + h^2 \right)$ 。

因为 $l(\cdot)$ 在 $[-1, 1]$ 上有界并关于零点对称，令 $\tilde{\omega}^2 = \sum_{i=-T+1}^{T-1} l(i/q_T) \tilde{\gamma}(i)$ ，其中，对于 $i < 0$ ，有 $\tilde{\gamma}(i) = \tilde{\gamma}(-i)$ 。经过简单计算可得：

$$|\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}^2| \leq \sup_{0 \leq i \leq q_T} |\hat{\gamma}(j) - \tilde{\gamma}(j)| \sum_{i=-T+1}^{T-1} |l(i/q_T)| = O_p\left(\frac{q_T}{\sqrt{Th}} + h^2 q_T \right) \quad (10)$$

根据 Jansson (2002) 引理 1，可得 $q_T^{-1} \sum_{i=-T+1}^{T-1} |l(i/q_T)| < \infty$ 。另外，与 Cavaliere (2005) 中引理

4 的证明类似，可得 $\tilde{\omega}^2 = \omega^2 + o_p(1)$ 。因此在原假设和备择假设下，有 $\hat{\omega}^2 \xrightarrow{p} \omega^2$ 。■

定理一的证明：在原假设下，由上面的引理 1 和引理 2 可得。■

定理二的证明：在备择假设下，由上面的引理 1 和引理 2 可得。■

定理三的证明：在局部备择假设： $H_{LA}^1: \sigma_t = \sigma_0 + b_T \pi_t$ 下，当 $b_T = T^{-1/2}$ 时，由上面的引理 1 可得：

$$E_T(r) \xrightarrow{d} \omega B(r) + c \left[\int_0^r \pi(s) ds - r \int_0^1 \pi(s) ds \right], \quad r \in (0, 1] \quad (11)$$

并根据上面的引理 2，可得定理 3 (i)。

在局部备择假设： $H_{LA}^2: \sigma_t = \sigma_0 + d_T \psi\left(\frac{t/T - \tau_0}{\delta_T}\right)$ 下，当 $d_T \rightarrow 0$ 时，由引理 1 可得：

$$E_T(r) \xrightarrow{d} \omega B(r) + cd_T \sqrt{T} \left[\int_0^r \psi\left(\frac{s - \tau_0}{\delta_T}\right) ds - r \int_0^1 \psi\left(\frac{s - \tau_0}{\delta_T}\right) ds \right] \quad (12)$$

因为：

$$d_T \int_0^r \psi\left(\frac{s - \tau_0}{\delta_T}\right) ds = \delta_T d_T \int_{-\infty}^{(r - \tau_0)/\delta_T} \psi(u) du \quad (13)$$

对于 $r < \tau_0$ ，有 $\int_{-\infty}^{(r-\tau_0)/\delta_T} \psi(u) du = 0$ ；对于 $r = \tau_0$ ，有 $\int_{-\infty}^{(r-\tau_0)/\delta_T} \psi(u) du = \int_{-\infty}^0 \psi(u) du$ ；对于 $r > \tau_0$ ，有 $\int_{-\infty}^{(r-\tau_0)/\delta_T} \psi(u) du = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du$ 。基于 $d_T \delta_T = T^{-1/2}$ ，可得：

$$E_T(r) \xrightarrow{d} \omega \underline{B}(r) + c \left[\int_{-\infty}^{(r-\tau_0)/\delta_T} \psi(u) du - r \int_{-\infty}^{\infty} \psi(u) du \right], \quad r \in (0, 1] \quad (14)$$

并根据上面的引理 2，可得定理 3 (ii)。■

附录 B

附表 1

备择假设 DGPP.1 在 5%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.944	0.950	0.949	0.920	0.971	0.951	0.939	0.943	0.943	0.908	0.968	0.948
	500	0.999	0.999	0.999	0.997	1.000	0.998	0.999	0.998	0.999	0.993	1.000	0.997
	800	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.708	0.739	0.306	0.234	0.384	0.346	0.675	0.711	0.289	0.223	0.372	0.331
	500	0.867	0.884	0.405	0.355	0.471	0.422	0.840	0.855	0.378	0.327	0.445	0.406
	800	0.966	0.966	0.561	0.515	0.606	0.561	0.937	0.940	0.516	0.471	0.567	0.534
$St(5,0.75)$	300	0.853	0.863	0.400	0.355	0.504	0.446	0.822	0.824	0.375	0.336	0.483	0.430
	500	0.965	0.968	0.596	0.522	0.663	0.593	0.949	0.945	0.552	0.490	0.617	0.569
	800	0.998	0.999	0.760	0.719	0.798	0.759	0.989	0.991	0.721	0.666	0.756	0.716
$\chi^2(4)$	300	0.902	0.906	0.642	0.549	0.718	0.664	0.884	0.895	0.601	0.523	0.687	0.633
	500	0.993	0.990	0.876	0.819	0.903	0.870	0.989	0.987	0.829	0.778	0.867	0.834
	800	1.000	1.000	0.983	0.961	0.986	0.974	1.000	1.000	0.946	0.928	0.960	0.949

附表 2

备择假设 DGPP.2 在 5%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.233	0.256	0.102	0.134	0.436	0.496	0.231	0.248	0.101	0.130	0.412	0.477
	500	0.602	0.635	0.437	0.541	0.792	0.871	0.587	0.624	0.391	0.510	0.761	0.833
	800	0.943	0.949	0.882	0.936	0.976	0.984	0.939	0.944	0.836	0.911	0.967	0.982
$T(3)$	300	0.082	0.094	0.010	0.005	0.032	0.030	0.074	0.095	0.011	0.004	0.032	0.028
	500	0.204	0.219	0.013	0.011	0.048	0.048	0.171	0.199	0.013	0.009	0.049	0.048
	800	0.471	0.494	0.040	0.044	0.096	0.104	0.405	0.441	0.036	0.038	0.080	0.092
$St(5,0.75)$	300	0.107	0.109	0.009	0.005	0.053	0.051	0.098	0.109	0.007	0.004	0.047	0.045
	500	0.355	0.400	0.029	0.033	0.092	0.102	0.312	0.371	0.028	0.026	0.082	0.090
	800	0.732	0.780	0.072	0.096	0.183	0.219	0.640	0.696	0.062	0.073	0.160	0.189
$\chi^2(4)$	300	0.163	0.176	0.023	0.015	0.096	0.104	0.135	0.160	0.022	0.014	0.088	0.094
	500	0.472	0.536	0.102	0.125	0.249	0.294	0.423	0.483	0.091	0.110	0.225	0.261
	800	0.881	0.885	0.226	0.308	0.518	0.576	0.827	0.848	0.191	0.249	0.444	0.496

附表 3 备择假设 DGPP.3 在 5% 的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.661	0.729	0.647	0.641	0.728	0.737	0.654	0.725	0.625	0.621	0.717	0.724
	500	0.850	0.910	0.871	0.855	0.908	0.899	0.844	0.902	0.847	0.835	0.888	0.883
	800	1.000	1.000	0.980	0.974	0.984	0.984	0.975	0.986	0.968	0.967	0.981	0.975
$T(3)$	300	0.367	0.478	0.139	0.165	0.203	0.225	0.352	0.453	0.133	0.164	0.200	0.223
	500	0.534	0.619	0.182	0.215	0.230	0.272	0.503	0.586	0.172	0.203	0.226	0.263
	800	0.708	0.781	0.277	0.314	0.328	0.368	0.669	0.740	0.265	0.286	0.306	0.339
$St(5,0.75)$	300	0.473	0.592	0.203	0.227	0.273	0.294	0.446	0.549	0.188	0.222	0.267	0.283
	500	0.697	0.758	0.288	0.312	0.365	0.364	0.650	0.722	0.270	0.298	0.332	0.346
	800	0.846	0.905	0.441	0.454	0.501	0.508	0.806	0.871	0.402	0.400	0.457	0.467
$\chi^2(4)$	300	0.541	0.649	0.319	0.327	0.412	0.416	0.524	0.622	0.295	0.321	0.393	0.405
	500	0.764	0.834	0.508	0.512	0.579	0.585	0.734	0.809	0.460	0.491	0.550	0.560
	800	0.921	0.951	0.700	0.700	0.744	0.747	0.892	0.932	0.645	0.658	0.698	0.709

附表 4 备择假设 DGPP.4 在 5% 的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.929	0.940	0.936	0.905	0.962	0.945	0.927	0.939	0.926	0.892	0.957	0.938
	500	0.998	0.999	0.998	0.996	0.999	0.998	0.997	0.998	0.996	0.993	0.999	0.995
	800	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.687	0.729	0.284	0.228	0.380	0.336	0.649	0.705	0.271	0.214	0.359	0.326
	500	0.846	0.875	0.382	0.339	0.451	0.406	0.823	0.849	0.349	0.311	0.418	0.395
	800	0.952	0.965	0.542	0.487	0.587	0.544	0.921	0.935	0.498	0.444	0.546	0.515
$St(5,0.75)$	300	0.831	0.857	0.377	0.349	0.479	0.438	0.797	0.821	0.363	0.327	0.459	0.419
	500	0.959	0.961	0.581	0.502	0.641	0.586	0.930	0.943	0.538	0.474	0.597	0.559
	800	0.998	0.999	0.747	0.695	0.777	0.742	0.985	0.988	0.701	0.641	0.735	0.692
$\chi^2(4)$	300	0.878	0.904	0.612	0.537	0.702	0.640	0.860	0.891	0.572	0.513	0.667	0.620
	500	0.987	0.988	0.848	0.801	0.892	0.857	0.982	0.985	0.805	0.749	0.846	0.819
	800	1.000	1.000	0.971	0.953	0.981	0.967	1.000	1.000	0.941	0.910	0.958	0.936

附表 5 原假设在 1%显著性水平下各检验统计量的检验失真水平

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	-0.003	0.010	-0.004	-0.004	0.009	0.011	-0.002	0.010	-0.003	-0.001	0.011	0.015
	500	0.001	0.000	-0.004	-0.003	0.003	0.006	0.001	0.000	-0.004	-0.001	0.005	0.007
	800	-0.005	-0.003	-0.008	-0.008	-0.003	-0.004	-0.005	-0.004	-0.007	-0.008	-0.002	-0.004
$T(3)$	300	0.000	0.011	-0.005	0.003	0.004	0.015	0.002	0.012	-0.005	0.003	0.006	0.018
	500	-0.001	0.004	-0.008	-0.003	-0.001	0.004	0.000	0.005	-0.008	-0.002	-0.001	0.009
	800	0.003	0.006	-0.007	0.001	-0.004	0.005	0.002	0.006	-0.007	0.001	-0.004	0.006
$St(5,0.75)$	300	-0.001	0.005	-0.008	-0.004	-0.004	0.004	-0.002	0.006	-0.008	-0.003	-0.003	0.008
	500	-0.001	0.008	-0.007	-0.004	-0.004	0.003	0.000	0.010	-0.007	-0.002	-0.002	0.006
	800	0.001	0.006	-0.006	-0.003	-0.001	0.008	0.004	0.010	-0.007	-0.002	-0.001	0.012
$\chi^2(4)$	300	0.005	0.002	-0.007	-0.003	-0.001	0.010	0.004	0.003	-0.008	-0.002	0.000	0.015
	500	-0.001	0.007	-0.005	0.006	0.007	0.013	-0.001	0.009	-0.005	0.008	0.010	0.014
	800	-0.003	-0.003	-0.004	0.001	0.003	0.006	-0.003	-0.003	-0.004	0.001	0.003	0.006

附表 6 备择假设 DGPP.1 在 1%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.848	0.851	0.818	0.707	0.904	0.867	0.842	0.846	0.783	0.679	0.888	0.848
	500	0.991	0.983	0.989	0.976	0.996	0.990	0.990	0.981	0.984	0.965	0.992	0.987
	800	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.488	0.505	0.080	0.075	0.175	0.147	0.455	0.476	0.077	0.074	0.164	0.142
	500	0.727	0.744	0.168	0.125	0.252	0.217	0.668	0.689	0.158	0.110	0.233	0.205
	800	0.909	0.905	0.328	0.259	0.405	0.344	0.847	0.858	0.289	0.240	0.372	0.319
$St(5,0.75)$	300	0.672	0.674	0.150	0.119	0.275	0.238	0.611	0.633	0.139	0.114	0.256	0.225
	500	0.898	0.888	0.345	0.284	0.436	0.395	0.851	0.841	0.307	0.248	0.403	0.366
	800	0.985	0.985	0.562	0.479	0.642	0.583	0.958	0.963	0.491	0.414	0.576	0.523
$\chi^2(4)$	300	0.758	0.762	0.311	0.242	0.488	0.433	0.728	0.724	0.279	0.214	0.458	0.405
	500	0.959	0.953	0.643	0.539	0.757	0.686	0.940	0.930	0.587	0.499	0.707	0.630
	800	1.000	1.000	0.889	0.839	0.932	0.899	0.997	0.996	0.844	0.775	0.887	0.849

附表 7 备择假设 DGPP.2 在 1% 的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.031	0.011	0.005	0.010	0.143	0.190	0.028	0.011	0.004	0.010	0.125	0.170
	500	0.157	0.085	0.048	0.097	0.381	0.515	0.146	0.086	0.044	0.082	0.348	0.478
	800	0.575	0.523	0.257	0.498	0.813	0.901	0.561	0.507	0.233	0.442	0.763	0.866
$T(3)$	300	0.008	0.006	0.002	0.002	0.003	0.002	0.007	0.008	0.002	0.001	0.003	0.002
	500	0.028	0.017	0.000	0.000	0.003	0.002	0.025	0.014	0.000	0.000	0.003	0.001
	800	0.102	0.079	0.003	0.003	0.015	0.021	0.084	0.064	0.003	0.003	0.014	0.017
$St(5,0.75)$	300	0.011	0.010	0.000	0.000	0.003	0.005	0.010	0.009	0.000	0.000	0.003	0.004
	500	0.065	0.039	0.001	0.001	0.016	0.019	0.057	0.032	0.001	0.001	0.012	0.016
	800	0.254	0.213	0.005	0.007	0.038	0.052	0.210	0.164	0.004	0.004	0.031	0.037
$\chi^2(4)$	300	0.015	0.013	0.000	0.000	0.019	0.020	0.014	0.012	0.001	0.000	0.019	0.017
	500	0.109	0.068	0.004	0.008	0.058	0.081	0.098	0.062	0.004	0.006	0.051	0.068
	800	0.395	0.343	0.019	0.046	0.135	0.206	0.330	0.283	0.017	0.040	0.114	0.164

附表 8 备择假设 DGPP.3 在 1% 的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.398	0.495	0.335	0.357	0.505	0.517	0.401	0.489	0.324	0.336	0.495	0.505
	500	0.656	0.762	0.630	0.637	0.750	0.748	0.646	0.757	0.592	0.611	0.717	0.724
	800	0.893	0.941	0.887	0.892	0.938	0.936	0.886	0.934	0.870	0.869	0.925	0.922
$T(3)$	300	0.149	0.235	0.033	0.058	0.069	0.103	0.141	0.217	0.034	0.060	0.070	0.101
	500	0.284	0.389	0.048	0.083	0.097	0.126	0.260	0.347	0.044	0.075	0.094	0.120
	800	0.484	0.599	0.111	0.134	0.162	0.193	0.444	0.558	0.091	0.126	0.142	0.175
$St(5,0.75)$	300	0.243	0.337	0.049	0.076	0.107	0.138	0.220	0.321	0.048	0.075	0.105	0.144
	500	0.442	0.563	0.106	0.137	0.168	0.204	0.402	0.516	0.096	0.126	0.150	0.187
	800	0.680	0.773	0.198	0.231	0.258	0.301	0.627	0.726	0.177	0.204	0.235	0.272
$\chi^2(4)$	300	0.301	0.405	0.098	0.137	0.203	0.224	0.283	0.382	0.092	0.127	0.194	0.220
	500	0.536	0.645	0.220	0.265	0.333	0.363	0.503	0.611	0.197	0.247	0.310	0.347
	800	0.787	0.850	0.429	0.453	0.530	0.552	0.742	0.826	0.381	0.396	0.486	0.502

附表 9 备择假设 DGPP.4 在 1%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.821	0.845	0.761	0.672	0.885	0.848	0.817	0.842	0.729	0.648	0.869	0.826
	500	0.987	0.983	0.984	0.956	0.993	0.984	0.984	0.981	0.977	0.943	0.989	0.981
	800	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.453	0.500	0.077	0.074	0.152	0.138	0.429	0.480	0.074	0.071	0.150	0.135
	500	0.688	0.737	0.157	0.128	0.240	0.202	0.642	0.681	0.142	0.110	0.220	0.195
	800	0.884	0.895	0.297	0.247	0.367	0.328	0.834	0.845	0.264	0.220	0.336	0.302
$St(5,0.75)$	300	0.632	0.661	0.136	0.118	0.258	0.233	0.574	0.626	0.124	0.112	0.244	0.226
	500	0.870	0.880	0.310	0.249	0.412	0.374	0.821	0.838	0.277	0.227	0.370	0.344
	800	0.979	0.980	0.526	0.459	0.601	0.553	0.947	0.963	0.460	0.383	0.544	0.497
$\chi^2(4)$	300	0.720	0.755	0.283	0.233	0.462	0.417	0.689	0.718	0.252	0.207	0.432	0.384
	500	0.942	0.951	0.602	0.517	0.712	0.661	0.911	0.928	0.556	0.461	0.669	0.610
	800	0.997	1.000	0.860	0.809	0.910	0.872	0.994	0.996	0.808	0.737	0.863	0.825

附表 10 原假设在 10%显著性水平下各检验统计量的检验失真水平

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.015	0.029	-0.004	-0.004	0.034	0.035	0.019	0.026	-0.001	-0.007	0.034	0.040
	500	-0.005	0.003	-0.009	-0.008	0.020	0.033	-0.005	0.003	-0.005	-0.004	0.025	0.033
	800	-0.015	-0.009	-0.024	-0.017	0.007	0.016	-0.012	-0.008	-0.018	-0.013	0.015	0.021
$T(3)$	300	0.000	0.026	-0.035	-0.015	-0.011	0.005	0.003	0.025	-0.034	-0.013	-0.007	0.013
	500	0.003	0.007	-0.042	-0.028	-0.026	-0.003	0.005	0.012	-0.044	-0.019	-0.021	0.002
	800	-0.011	0.000	-0.037	-0.010	-0.026	0.002	-0.008	0.012	-0.036	-0.008	-0.017	0.006
$St(5,0.75)$	300	-0.016	0.025	-0.046	-0.026	-0.013	0.008	-0.009	0.025	-0.046	-0.017	-0.004	0.023
	500	0.004	0.032	-0.023	-0.006	-0.004	0.018	0.004	0.033	-0.026	0.002	0.001	0.028
	800	-0.007	0.015	-0.024	-0.020	-0.006	0.000	-0.002	0.022	-0.017	-0.012	0.001	0.009
$\chi^2(4)$	300	-0.004	0.009	-0.034	-0.020	-0.006	0.019	-0.005	0.019	-0.034	-0.009	0.005	0.027
	500	-0.003	0.027	-0.024	-0.009	-0.001	0.005	0.005	0.032	-0.022	-0.008	0.004	0.012
	800	-0.001	0.017	-0.023	-0.013	0.007	0.014	-0.001	0.017	-0.023	-0.013	0.007	0.014

附表 11

备择假设 DGPP.1 在 10%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.968	0.970	0.981	0.960	0.989	0.978	0.966	0.970	0.977	0.958	0.983	0.976
	500	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000	0.999	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000
	800	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.788	0.828	0.443	0.407	0.512	0.488	0.768	0.804	0.428	0.391	0.499	0.483
	500	0.910	0.921	0.541	0.502	0.580	0.553	0.882	0.901	0.505	0.481	0.558	0.538
	800	0.979	0.979	0.670	0.640	0.694	0.664	0.959	0.963	0.637	0.596	0.664	0.640
$St(5,0.75)$	300	0.898	0.911	0.553	0.497	0.626	0.584	0.878	0.888	0.539	0.470	0.600	0.566
	500	0.983	0.985	0.712	0.670	0.752	0.725	0.966	0.968	0.677	0.637	0.707	0.688
	800	0.999	0.999	0.841	0.811	0.866	0.835	0.995	0.996	0.802	0.773	0.829	0.803
$\chi^2(4)$	300	0.955	0.953	0.779	0.710	0.838	0.785	0.942	0.934	0.729	0.674	0.807	0.755
	500	0.997	0.999	0.929	0.905	0.946	0.927	0.994	0.995	0.899	0.867	0.920	0.898
	800	1.000	1.000	0.993	0.986	0.995	0.988	1.000	1.000	0.976	0.964	0.981	0.969

附表 12

备择假设 DGPP.2 在 10%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.465	0.548	0.321	0.392	0.651	0.708	0.454	0.543	0.311	0.362	0.618	0.685
	500	0.829	0.875	0.755	0.841	0.942	0.957	0.832	0.872	0.714	0.804	0.918	0.947
	800	0.978	0.987	0.977	0.988	0.994	0.999	0.980	0.988	0.966	0.982	0.991	0.995
$T(3)$	300	0.195	0.247	0.032	0.026	0.091	0.077	0.181	0.239	0.031	0.028	0.090	0.076
	500	0.416	0.476	0.059	0.061	0.127	0.120	0.371	0.435	0.057	0.059	0.119	0.113
	800	0.698	0.735	0.108	0.133	0.197	0.213	0.631	0.685	0.090	0.109	0.179	0.183
$St(5,0.75)$	300	0.272	0.356	0.049	0.042	0.118	0.111	0.242	0.332	0.045	0.040	0.118	0.111
	500	0.610	0.683	0.108	0.116	0.212	0.218	0.547	0.633	0.097	0.102	0.187	0.194
	800	0.911	0.930	0.222	0.252	0.361	0.387	0.849	0.894	0.187	0.210	0.308	0.334
$\chi^2(4)$	300	0.359	0.422	0.079	0.082	0.217	0.233	0.330	0.397	0.077	0.080	0.202	0.215
	500	0.708	0.796	0.248	0.295	0.445	0.497	0.666	0.762	0.230	0.262	0.406	0.442
	800	0.959	0.976	0.524	0.602	0.742	0.785	0.945	0.961	0.454	0.520	0.663	0.721

附表 13

备择假设 DGPP.3 在 10%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.769	0.828	0.767	0.773	0.819	0.813	0.762	0.825	0.756	0.766	0.813	0.803
	500	0.921	0.942	0.940	0.933	0.953	0.952	0.919	0.937	0.925	0.915	0.947	0.944
	800	0.986	0.995	0.991	0.988	0.997	0.993	0.986	0.993	0.987	0.985	0.991	0.988
$T(3)$	300	0.523	0.583	0.244	0.266	0.303	0.333	0.502	0.563	0.239	0.264	0.300	0.332
	500	0.647	0.726	0.301	0.337	0.350	0.380	0.620	0.701	0.287	0.319	0.332	0.370
	800	0.793	0.854	0.419	0.440	0.465	0.484	0.750	0.816	0.399	0.413	0.440	0.458
$St(5,0.75)$	300	0.619	0.697	0.311	0.345	0.376	0.390	0.587	0.657	0.305	0.335	0.367	0.385
	500	0.788	0.832	0.432	0.444	0.481	0.504	0.758	0.801	0.410	0.415	0.455	0.478
	800	0.904	0.939	0.574	0.581	0.613	0.616	0.877	0.910	0.538	0.543	0.576	0.583
$\chi^2(4)$	300	0.676	0.744	0.448	0.466	0.529	0.531	0.644	0.718	0.436	0.455	0.514	0.510
	500	0.857	0.895	0.660	0.662	0.704	0.701	0.830	0.869	0.632	0.626	0.675	0.674
	800	0.962	0.983	0.808	0.803	0.830	0.827	0.946	0.964	0.763	0.762	0.797	0.799

附表 14

备择假设 DGPP.4 在 10%的显著性水平下各检验统计量拒绝原假设的概率

误差分布	T	线性 GARCH(1,1)						二次方 GARCH(1,1)					
		CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
$N(0,1)$	300	0.960	0.969	0.973	0.954	0.986	0.973	0.958	0.969	0.966	0.952	0.981	0.970
	500	0.999	0.999	0.999	0.999	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999	0.997	1.000	0.999
	800	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$T(3)$	300	0.771	0.820	0.434	0.394	0.494	0.482	0.752	0.791	0.418	0.378	0.488	0.470
	500	0.903	0.916	0.515	0.481	0.567	0.539	0.871	0.898	0.492	0.465	0.543	0.519
	800	0.977	0.977	0.658	0.621	0.688	0.653	0.950	0.957	0.617	0.586	0.653	0.626
$St(5,0.75)$	300	0.888	0.909	0.536	0.481	0.608	0.566	0.862	0.883	0.513	0.460	0.585	0.552
	500	0.978	0.981	0.705	0.662	0.738	0.713	0.960	0.963	0.662	0.627	0.701	0.672
	800	0.999	0.999	0.826	0.800	0.845	0.831	0.992	0.994	0.788	0.760	0.811	0.791
$\chi^2(4)$	300	0.941	0.950	0.754	0.693	0.812	0.761	0.928	0.932	0.708	0.659	0.775	0.728
	500	0.995	0.996	0.920	0.889	0.935	0.918	0.991	0.993	0.883	0.855	0.911	0.882
	800	1.000	1.000	0.987	0.981	0.991	0.986	1.000	1.000	0.971	0.962	0.976	0.966

附表 15 基于美元对卢布汇率序列与 AR(1)过滤残差序列的检验结果

	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
收益率 ($T=255$)	1.754***	0.704**	1.177	5.549	1.321*	6.995
AR(1)残差 ($T=254$)	1.700***	0.651**	1.149	5.299	1.284*	6.625

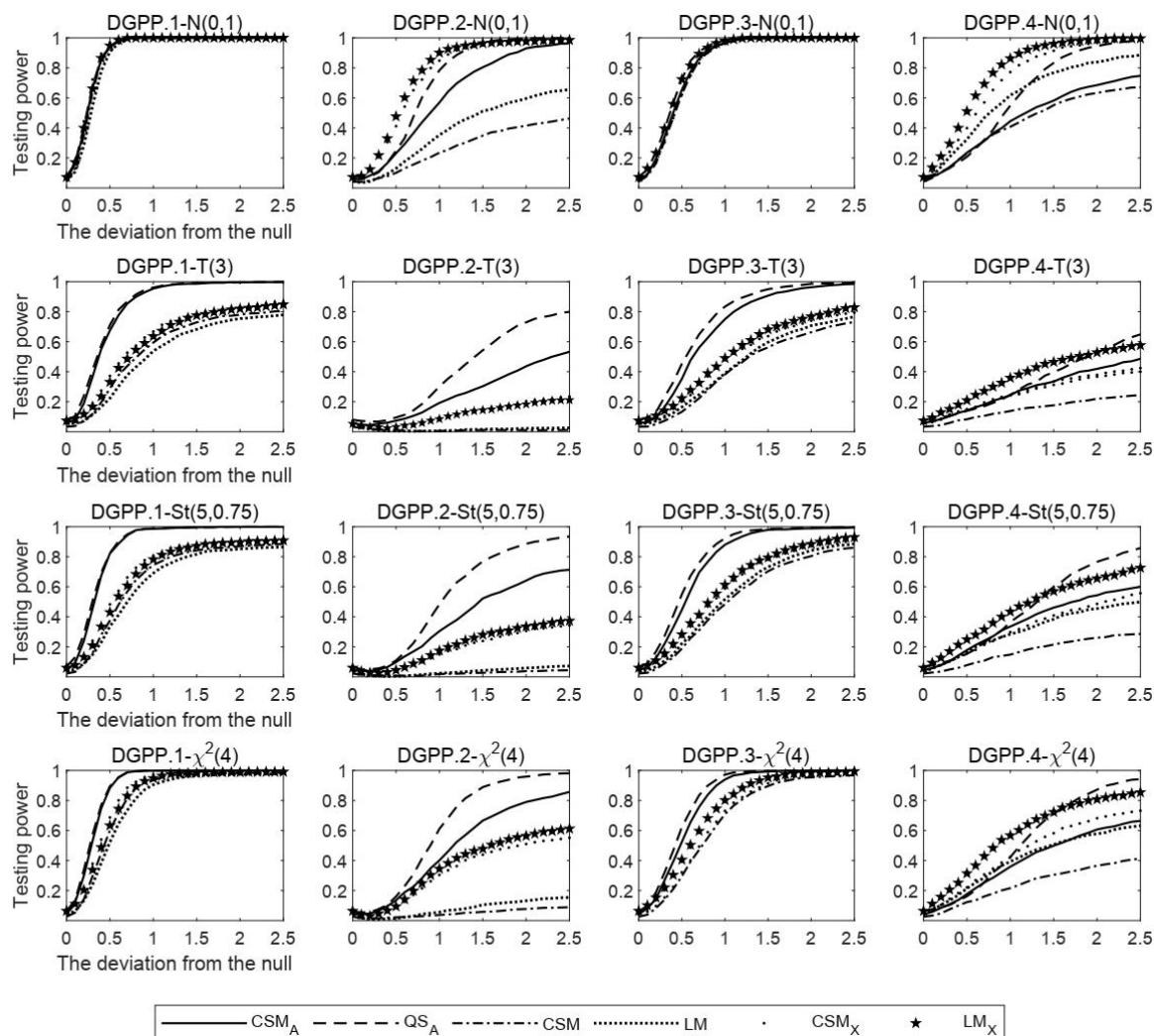
注：*，**与***分别代表在 10%，5%与 1%的置信水平下显著。下同。

附表 16 基于标普 500 指数回报率序列与 AR(1)过滤残差序列的检验结果

	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
收益率 ($T=416$)	1.504**	0.575**	1.146	5.282	1.318*	6.989
AR(1)残差 ($T=415$)	1.528**	0.596**	1.134	5.173	1.302*	6.822

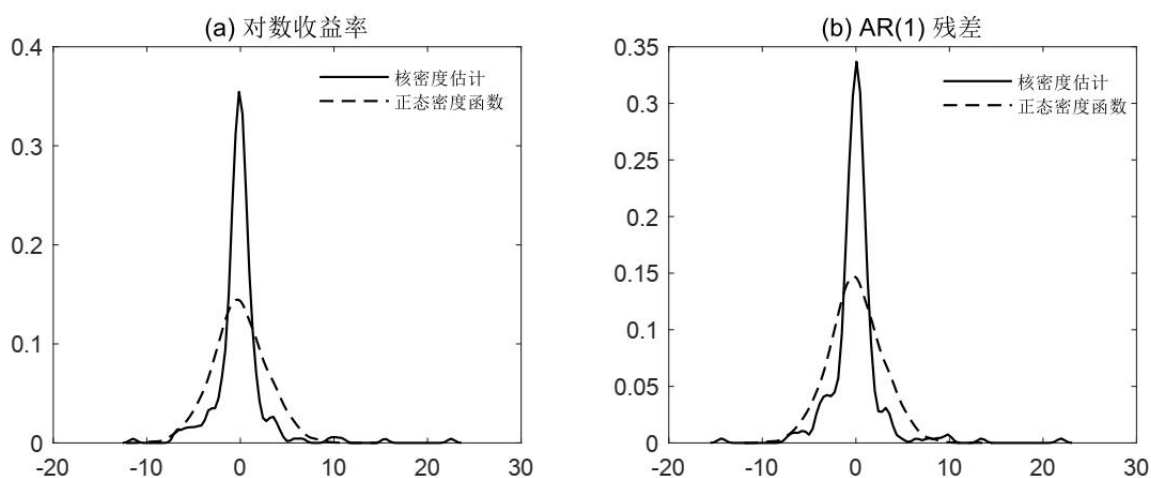
附表 17 基于标普 500 指数回报率序列与 AR(1)过滤残差序列的检验结果

	CSM _A	QS _A	CSM	LM	CSM _X	LM _X
收益率 ($T=242$)	1.475**	0.672**	1.193	6.560	1.320*	8.026*
AR(1)残差 ($T=241$)	1.480**	0.730**	1.181	6.471	1.312*	7.987*

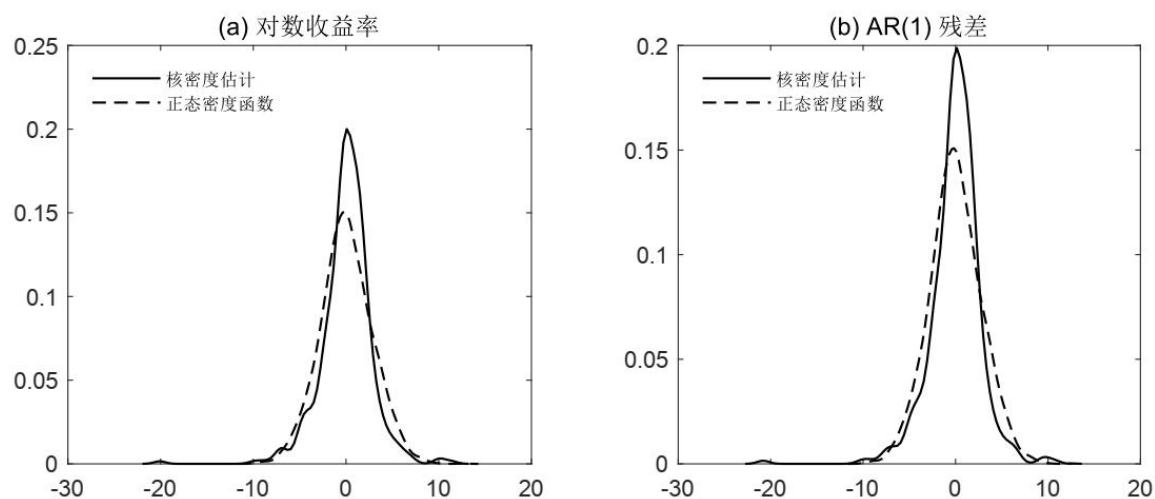


附图 1 不同分布和不同 DGPP.s 下的检验功效函数

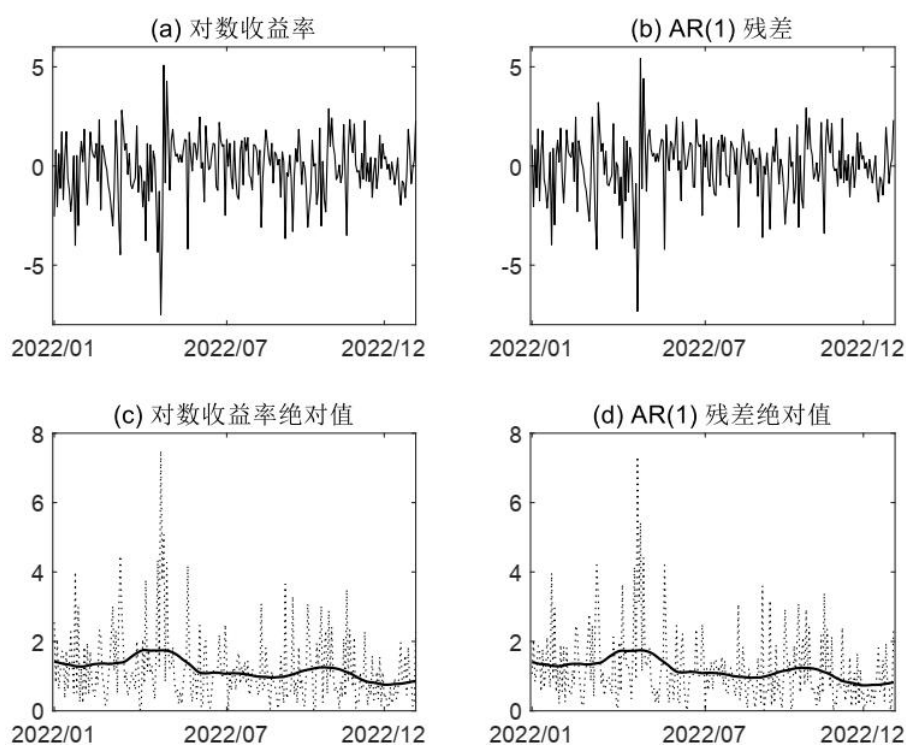
注：附图 1 中行代表不同的分布设定，列代表不同的备择假设。例如，DGPP.2-T(3)表示该图的设定来自于备择假设 DGPP.2 下，并服从自由度为 3 的标准 *student-t* 分布。



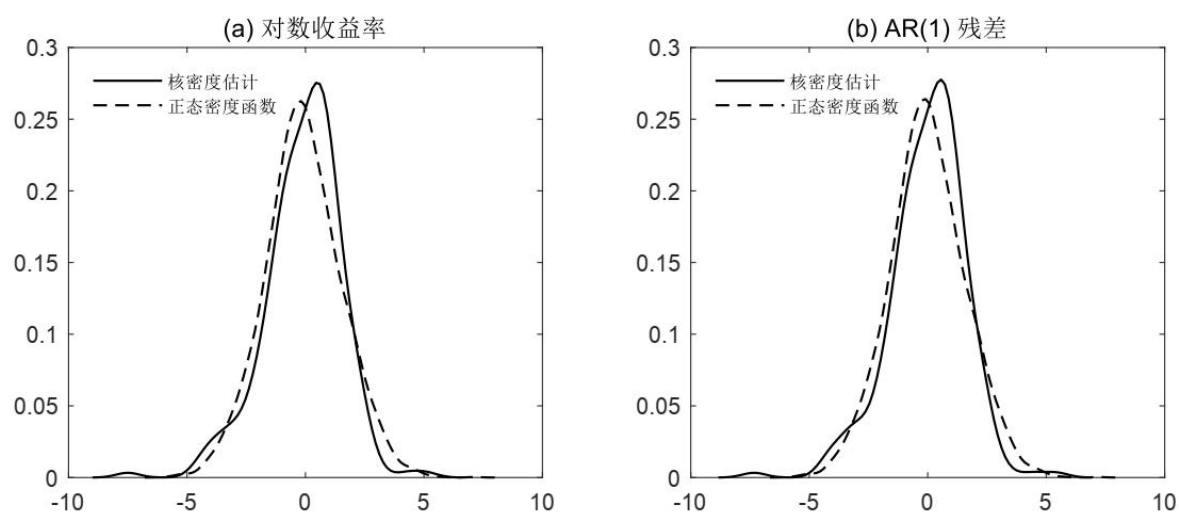
附图 2 美元对卢布汇率的回报率及经 AR(1)过滤残差的核估计密度函数以及具有相同均值与方差的正态密度函数



附图 3 标普 500 指数回报率及经 AR(1)过滤残差的核估计密度函数以及具有相同均值与方差的正态密度函数



附图 4 中证 1000 指数回报率、绝对回报率与非参数波动率估计（光滑曲线）



附图5 中证1000指数回报率及经AR(1)过滤残差的核估计密度函数以及具有相同均值与方差的正态密度函数

文中蒙特卡罗模拟和应用研究部分都是通过 matlab 编程实现，具体程序实现代码可参见：
<https://github.com/Ruikewu/Volatility-Structural-Changing-Test-with-Heavy-tailed-innovations>。