

附录：模型定理证明

定理 1：给定模型设定， $\frac{\partial k^*}{\partial r} < 0$ ， $\frac{d\bar{z}}{dr} = 0$ ；同时， θ 越高， k^* 与 $\bar{z}$ 也越大。

证明：式 (3) 对 r 求导，可以得到：

$$\frac{\partial k^*}{\partial r} = -\frac{\alpha}{(1-\alpha)k^{*-\alpha}r^2} \frac{\int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)}{1 - G(\bar{z}, \theta)} < 0$$

$\bar{z}$ 对 r 求导，有如下结果：

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}}{dr} &= k^{*1-\alpha} + r(1-\alpha)k^{*-\alpha} \frac{\partial k^*}{\partial r} \\ &= k^{*1-\alpha} - rk^{*2(1-\alpha)} \frac{1 - G(\bar{z}, \theta)}{\alpha \int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)} \\ &= k^{*1-\alpha} \left[1 - rk^{*1-\alpha} \frac{1 - G(\bar{z}, \theta)}{\alpha \int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

对于分布 $G(z, \theta)$ ，根据二阶随机占优条件：

$$\begin{aligned} \int_0^{\beta} G(z, \theta_i) dz &\geq \int_0^{\beta} G(z, \theta_j) dz \\ \Rightarrow zG(z, \theta_i)|_0^{\beta} - \int_0^{\beta} z dG(z, \theta_i) &\geq zG(z, \theta_j)|_0^{\beta} - \int_0^{\beta} z dG(z, \theta_j) \\ \Rightarrow \beta G(\beta, \theta_i) - \hat{z} + \int_{\beta}^{\infty} z dG(z, \theta_i) &\geq \beta G(\beta, \theta_j) - \hat{z} + \int_{\beta}^{\infty} z dG(z, \theta_j) \\ \Rightarrow \int_{\beta}^{\infty} z dG(z, \theta_i) - \int_{\beta}^{\infty} z dG(z, \theta_j) &\geq \beta \{ [1 - G(\beta, \theta_i)] - [1 - G(\beta, \theta_j)] \} \end{aligned}$$

因此，对于风险较高的企业家，他所得到的 k^* 也越大。将式 (4) 带入 $\bar{z}$ ，得：

$$\bar{z} = \frac{\alpha \int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)}{[1 - G(\bar{z}, \theta)]}$$

基于上述推导结果，不难得出 θ 越大，违约风险越高。

定理 2：假设 $W > E[\pi^F(\rho, \theta_{min})]$ ，那么存在 $\hat{\theta} \in [\theta_{min}, \theta_{max}]$ ，仅风险高于 $\hat{\theta}$ 的企业家会选择向银行借款。

证明：

$$E[\pi^F(r, \theta)] = \int_0^{\infty} \max[zf(k) - rk, 0] dG(z, \theta) = \hat{z}f(k) - rk + f(k) \int_0^{\bar{z}} G(z, \theta) dz$$

由 $G(z, \theta)$ 二阶随机占优条件, 企业家的期望利润为 θ 的连续增函数。给定假设 $W > E[\pi^F(\rho, \theta_{\min})]$, 本文有 $E[\pi^F(r, \theta_{\min})] < E[\pi^F(\rho, \theta_{\min})] < W$, 因此存在 $\hat{\theta} \in [\theta_{\min}, \theta_{\max}]$, 使得仅当 $\theta \geq \hat{\theta}$ 时, $E[\pi^F(r, \theta)] \geq W$ 。

性质 1: $\frac{d\hat{\theta}}{dr} > 0$

证明: 由式 (5),

$$W = \bar{z}f(k) - rk + f(k) \int_0^{\bar{z}} G(z, \hat{\theta}) dz$$

因此,

$$\int_0^{\bar{z}} G(z, \hat{\theta}) dz = \frac{W - [\bar{z}f(k) - rk]}{f(k)}$$

由定理 1, 贷款利率的提高会降低 k 。结合式 (4), 不难推出贷款利率的提高会导致上式分子变大, 分母变小, 最终使得等式右边变大。结合随机占优条件, 若等式仍然成立, 则 $\hat{\theta}$ 也必须变大。

定理 3: 当 c 足够大时, 企业均衡投资规模小于社会最优投资规模, 即企业存在投资不足。

证明:

首先在 (3) 式两边乘以 k^* 后对 θ 积分, 得到如下结果:

$$\int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} \int_{\bar{z}}^{\infty} [zk^*f'(k^*) - rk^*] dG(z, \theta) dH(\theta) = \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} k^*f'(k^*) [\bar{z} - \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta)] dH(\theta) - r \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} [1 - G(\bar{z}, \theta)] k^* dH(\theta) = 0$$

将 (4) 带入上式,

$$\begin{aligned} & \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} k^*f'(k^*) [\bar{z} - \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta)] dH(\theta) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} \{\rho k^* - f(k^*) \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) + cG(\bar{z}, \theta)\} dH(\theta) \\ &= \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} k^* [\bar{z}f'(k^*) - \rho] dH(\theta) + \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} [f(k^*) - k^*f'(k^*)] \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) dH(\theta) \\ &\quad - \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} cG(\bar{z}, \theta) dH(\theta) = 0 \end{aligned}$$

因此,

$$\int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} k^* [\tilde{z} f'(k^*) - \rho] dH(\theta) = \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} cG(\bar{z}, \theta) dH(\theta) - \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} [f(k^*) - k^* f'(k^*)] \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) dH(\theta)$$

因此, k^* 是否大于 k^{fb} 取决于上式是否大于 0。

$$k^* \leq k^e \equiv c \geq \frac{\int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} [f(k^*) - k^* f'(k^*)] \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) dH(\theta)}{\int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} G(\bar{z}, \theta) dH(\theta)}$$

当 c 足够大时, $k^* < k^e$ 。

$$\frac{dE[\pi^b]}{dr} < 0$$

性质 2:

证明:

由式 (6),

$$\begin{aligned} E[\pi^b] &= \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} \left\{ \int_0^{\bar{z}} [zf(k^*) - c] dG(z, \theta) + \int_{\bar{z}}^{\infty} rk^* dG(z, \theta) \right\} dH(\theta) \\ &= \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} \left\{ k^{*\alpha} \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) - cG(\bar{z}, \theta) + rk^*[1 - G(\bar{z}, \theta)] \right\} dH(\theta) \end{aligned}$$

银行期望收益对贷款利率求导,

$$\begin{aligned} \frac{dE[\pi^b]}{dr} &= \int_{\hat{\theta}}^{\theta_{\max}} \left\{ \alpha k^{*\alpha-1} \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \theta) \frac{dk^*}{dr} + (k^* + r \frac{dk^*}{dr}) [1 - G(\bar{z}, \theta)] \right\} dH(\theta) - \{ k^{*\alpha} \int_0^{\bar{z}} z dG(z, \hat{\theta}) - \\ &cG(\bar{z}, \hat{\theta}) + rk^*[1 - G(\bar{z}, \hat{\theta})] \} \frac{d\hat{\theta}}{dr} \end{aligned}$$

(*)

根据定理 1 结果,

$$\begin{aligned} k^* + r \frac{dk^*}{dr} &= k^* - \frac{\alpha}{(1-\alpha)k^{*1-\alpha}r} \frac{\int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)}{1 - G(\bar{z}, \theta)} = k^* \left[1 - \frac{\alpha}{(1-\alpha)k^{*1-\alpha}r} \frac{\int_{\bar{z}}^{\infty} z dG(z, \theta)}{1 - G(\bar{z}, \theta)} \right] \\ &= k^* \left(1 - \frac{1}{1-\alpha} \right) < 0 \end{aligned}$$

结合定理 3 结果, (*) 式右边两项均小于 0, 因此 $\frac{dE[\pi^b]}{dr} < 0$ 。

定理 4: 存在 $\bar{\theta}$, 使得

$$E[\pi_f(r_f, \theta)] = E[\pi(r, \theta)]$$

$$\text{同时有 } \frac{\partial E[\pi_f(r_f, \theta)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\bar{\theta}} < \frac{\partial E[\pi(r, \theta)]}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\bar{\theta}}。$$

证明: $E[\pi_f(r_f, \theta_{max})] = 0$, 因此 $\bar{\theta} < \theta_{max}$ 。要想 $\bar{\theta}$ 存在, 需要证明存在 θ 满足如下关系:

$$\begin{aligned} E[\pi_f(r_f, \theta)] &> E[\pi(r, \theta)] \\ \Rightarrow p(\theta) \left[\bar{z} + \int_0^{\bar{z}} G(z, \theta) dz \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} r_f^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) &> \left[\bar{z} + \int_0^{\bar{z}} G(z, \theta) dz \right]^{\frac{1}{1-\alpha}} r^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} (1-\alpha) \\ \Rightarrow p(\theta) r_f^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} &> r^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\ \Rightarrow p(\theta) &> \left(\frac{r_f}{r} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \end{aligned}$$

由于 $r_f < r$, $\left(\frac{r_f}{r} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 1$, 再加上 $p(\theta_{min}) = 1$, 必然存在 $\bar{\theta}$, 使得 $E[\pi_f(r_f, \theta)] = E[\pi(r, \theta)]$ 。

此外, $\frac{\partial E[\pi_f(r_f, \theta)]}{\partial \theta} \big|_{\theta=\bar{\theta}} \propto Z'(\bar{\theta})p(\bar{\theta}) + Z(\bar{\theta})p'(\bar{\theta}) < Z'(\bar{\theta}) \propto \frac{\partial E[\pi(r, \theta)]}{\partial \theta} \big|_{\theta=\bar{\theta}}$ 。模型满足 single crossing property。