# 附录

## 附录 1.内点解的数学推导

效用函数为：$u=\theta(C_1^{\alpha_1}L_1^{1-\alpha_1})^{1-\frac{1}{\sigma}}+(1-\theta)(C_0^{\alpha_0}L_0^{1-\alpha_0})^{1-\frac{1}{\sigma}}$ (1)

预算约束为：$P_0C_0+P_1C_1+F_1=W(1-L_0-L_1)$ (2)

消费者在满足预算约束条件时追求最大化效用，利用拉格朗日乘数法求解效用函数最大值，可得:

$$\begin{cases} F_{C_1}=\theta\alpha_1(\dfrac{\sigma-1}{\sigma})C_1^{\alpha_1(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}L_1^{(1-\alpha_1)(\frac{\sigma-1}{\sigma})}+\lambda P_1=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{①} \\ F_{C_0}=(1-\theta)\alpha_0(\dfrac{\sigma-1}{\sigma})C_0^{\alpha_0(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}L_0^{(1-\alpha_0)(\frac{\sigma-1}{\sigma})}+\lambda P_0=0\ldots\ldots\ldots\text{②} \\ F_{L_1}=\theta(1-\alpha_1)(\dfrac{\sigma-1}{\sigma})L_1^{(1-\alpha_1)(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}C_1^{\alpha_1(\frac{\sigma-1}{\sigma})}+\lambda W=0\ldots\ldots\ldots\ldots\text{③} \\ F_{L_0}=(1-\theta)(1-\alpha_0)(\dfrac{\sigma-1}{\sigma})L_0^{(1-\alpha_0)(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}C_0^{\alpha_0(\frac{\sigma-1}{\sigma})}+\lambda W=0\ldots\text{④} \\ F_{\lambda}=C_1L_1+F+C_0L_0+W(1-L_1-L_0)=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\text{⑤} \end{cases} \quad (A1)$$

将 A1①式除以 A1③式，可得：

$$L_1=\frac{(1-\alpha_1)C_1P_1}{\alpha_1W} \quad (A2)$$

将 A1②式除以 A1④式，可得：

$$L_0=\frac{(1-\alpha_0)C_0P_0}{\alpha_0W} \quad (A3)$$

将 A1③式除以 A1④式，可得：

$$1=\frac{\theta(1-\alpha_1)L_1^{(1-\alpha_1)(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}C_1^{\alpha_1(\frac{\sigma-1}{\sigma})}}{(1-\theta)(1-\alpha_0)L_0^{(1-\alpha_0)(\frac{\sigma-1}{\sigma})-1}C_0^{\alpha_0(\frac{\sigma-1}{\sigma})}} \quad (A4)$$

将 A2 和 A3 代入 A4，可得：

$$1=\frac{\theta\left(1-\alpha_1\right)^{(1-\alpha_1)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)}P_1^{(1-\alpha_1)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}C_1^{\frac{-1}{\sigma}}(\alpha_0W)^{(1-\alpha_0)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}}{\left(1-\theta\right)\left(1-\alpha_0\right)^{(1-\alpha_0)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)}P_0^{(1-\alpha_1)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}C_0^{\frac{-1}{\sigma}}(\alpha_1W)^{(1-\alpha_1)\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)-1}} \quad (A5)$$

将 A5 两边取 $-\sigma$ 次幂，可得：

$$\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma}\frac{C_1}{C_0}\left[\frac{\left(\frac{P_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\frac{W^{1-\alpha_1}}{\left(1-\alpha_1\right)^{1-\alpha_1}}}{\left(\frac{P_0}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0}\frac{W^{1-\alpha_0}}{\left(1-\alpha_0\right)^{1-\alpha_0}}}\right]^{\sigma-1}\frac{P_1\alpha_0}{P_0\alpha_1}=1 \tag{A6}$$

这里令：

$$\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{-\sigma}\left[\frac{\left(\frac{P_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1}\frac{W^{1-\alpha_1}}{\left(1-\alpha_1\right)^{1-\alpha_1}}}{\left(\frac{P_0}{\alpha_0}\right)^{\alpha_0}\frac{W^{1-\alpha_0}}{\left(1-\alpha_0\right)^{1-\alpha_0}}}\right]^{\sigma-1}=\Gamma \tag{A7}$$

那么 A6 就可以变化为：

$$\frac{C_1}{C_0}\frac{P_1\alpha_0}{P_0\alpha_1}\Gamma=1 \tag{A8}$$

$$\frac{C_1P_1}{\alpha_1}\Gamma=\frac{P_0C_0}{\alpha_0} \tag{A9}$$

将 A2、A3 代入预算约束，可得：

$$P_1C_1+P_0C_0+F_1=W\left(1-\frac{\left(1-\alpha_1\right)C_1P_1}{\alpha_1W}-\frac{\left(1-\alpha_0\right)C_0P_0}{\alpha_0W}\right) \tag{A10}$$

$$W-F_1=\frac{C_1P_1}{\alpha_1}+\frac{P_0C_0}{\alpha_0} \tag{A11}$$

将 A9 代入 A11 式，可得：

$$C_1=\frac{W-F_1}{\left(1+\Gamma\right)}\times\frac{\alpha_1}{P_1} \tag{A12}$$

$$C_0=\frac{W-F}{\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)}\times\frac{\alpha_0}{P_0} \tag{A13}$$

根据 A2、A3，可得：

$$L_1=\frac{(1-\alpha_1)}{W}\times\frac{W-F_1}{1+\Gamma} \tag{A14}$$

$$L_0=\frac{(1-\alpha_0)}{W}\times\frac{W-F_1}{1+\frac{1}{\Gamma}} \tag{A15}$$

由 A14 可得：

$$1+\Gamma=\frac{1-\alpha_1}{W}\times\frac{W-F_1}{L_1}$$

$$\Gamma=\frac{(1-\frac{F_1}{W})(1-\alpha_1)-L_1}{L_1} \tag{A16}$$

将 A7 代入 A16，就得到文中 3 式：

$$\frac{(1-\alpha_1)(1-\frac{F_1}{W})-L_1}{L_1}=[\frac{(\frac{P_1}{\alpha_1})^{\alpha_1}\frac{1}{(1-\alpha_1)^{1-\alpha_1}}}{(\frac{P_0}{\alpha_0})^{\alpha_0}\frac{1}{(1-\alpha_0)^{1-\alpha_0}}}]^{(\sigma-1)}W^{(\alpha_0-\alpha_1)(\sigma-1)}(\frac{1-\theta}{\theta})^{\sigma} \tag{A17}$$

由 A17 式可得：

$$\frac{(1-\alpha_1)(1-\frac{F_1}{W})-L_1}{L_1}=AW^{(\alpha_0-\alpha_1)(\sigma-1)}(\frac{1-\theta}{\theta})^{\sigma} \quad \text{（A17）}$$

其中，

$$A=[\frac{(\frac{P_1}{\alpha_1})^{\alpha_1}\frac{1}{(1-\alpha_1)^{1-\alpha_1}}}{(\frac{P_0}{\alpha_0})^{\alpha_0}\frac{1}{(1-\alpha_0)^{1-\alpha_0}}}]^{(\sigma-1)}$$

由于互联网商品价格为 0，从而$\alpha_1=0$；另外固定的互联网接入费相对于总收入的占比是非常小的(本文根据计算得出约为 0.4%)，从而可以假定$\frac{F_1}{W}\approx 0$。再将 A17 式左右两边取自然对数，进而得到：

$$\ln[\frac{1-L_1}{L_1}]=\ln A+(\alpha_0-\alpha_1)(\sigma-1)\ln W+\sigma\ln(\frac{1-\theta}{\theta}) \tag{3}$$

(3)式左边表示非上网休闲时间与上网休闲时间的比例，$lnA$ 对于不同个体来说是常数，$\alpha_1=0$，$\alpha_0=\frac{P_0C_0}{P_0C_0+WL_0}$，从而我们可以通过将上网休闲时间对总收入进行回归，进而估计出互联网商品和普通商品的消费替代弹性，利用人口统计特征来控制个体关于互联网商品相对于普通商品的重要程度对上网休闲时间的影响。具体回归方程可以表示为：

$$\ln(\frac{1-Internettime(i)}{Internettime(i)})=\beta_0+\beta_1\ln(Income(i))+\beta_2 demographic(i)+\varepsilon_i \tag{4}$$

$$\hat{\sigma}=\frac{\hat{\beta}_1}{\alpha_0}+1 \tag{A18}$$

其中，A18 式为替代弹性估计式。

## 附录 2.公式(5)的数学推导

### 2.1 支出函数推导

对于商品 $i$，定义联合柯布-道格拉斯复合消费 $Y_i$，对于定义复合价格(含货币成本与时间成本) $\lambda_i$。

根据效用函数与 A12-A15 可得：

$$Y_1 = C_1^{\alpha_1} L_1^{1-\alpha_1} = (\frac{\alpha_1}{P_1})^{\alpha_1} (\frac{1-\alpha_1}{W})^{1-\alpha_1} \times \frac{W-F_1}{1+\Gamma}$$
$$Y_0 = C_0^{\alpha_0} L_0^{1-\alpha_0} = (\frac{\alpha_0}{P_0})^{\alpha_1} (\frac{1-\alpha_0}{W})^{1-\alpha_0} \times \frac{W-F_1}{1+\frac{1}{\Gamma}} \tag{A19}$$

根据柯布道格拉斯函数性质，易知 $\frac{W-F_1}{1+\Gamma}$ 和 $\frac{W-F_1}{1+\frac{1}{\Gamma}}$ 分别为复合消费 $Y_1$ 和 $Y_0$ 的总支出。

从而，对应复合价格可得：

$$\lambda_1 = (\frac{P_1}{\alpha_1})^{\alpha_1} (\frac{W}{1-\alpha_1})^{1-\alpha_1}$$
$$\lambda_0 = (\frac{P_0}{\alpha_0})^{\alpha_0} (\frac{W}{1-\alpha_0})^{1-\alpha_0} \tag{A20}$$

复合消费 $Y_1$ 和 $Y_0$ 可表示为：

$$Y_1 = \frac{W-F_1}{\lambda_1(1+\Gamma)}$$
$$Y_0 = \frac{W-F_1}{\lambda_0(1+\frac{1}{\Gamma})} \tag{A21}$$

对应 $C_1$、$C_0$、$Y_1$ 和 $Y_0$ 可表示为：

$$C_1 = \frac{\alpha_1 \lambda_1 Y_1}{P_1} \quad , \quad C_0 = \frac{\alpha_0 \lambda_0 Y_0}{P_0}$$
$$L_1 = \frac{(1-\alpha_1)\lambda_1 Y_1}{W}, \quad L_0 = \frac{(1-\alpha_0)\lambda_0 Y_0}{W} \tag{A22}$$

进而可知：

$$\frac{Y_1}{Y_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1 \Gamma} \tag{A23}$$

由 A7 可得：

$$(\frac{\lambda_1}{\lambda_0})^{\sigma-1} (\frac{1-\theta}{\theta})^{\sigma} = \Gamma \tag{A24}$$

将 A24 代入 A23，然后将 A23 取 $\frac{\sigma-1}{\sigma}$ 次幂，则可以得到：

$$\theta Y_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}=(1-\theta)\frac{1}{\Gamma}Y_0^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \tag{A25}$$

在最优解处，效用函数可表示为：

$$u=\theta Y_1^{1-1/\sigma}+\left(1-\theta\right)Y_0^{1-1/\sigma} \tag{A26}$$

将 A25 代入 A26，可得：

$$u=\left(1-\theta\right)\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)Y_0^{1-1/\sigma} \tag{A27}$$

将 A21 代入 A27，可得：

$$u=\left(1-\theta\right)\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{\sigma}}(\frac{1}{\lambda_0})^{1-\frac{1}{\sigma}}(W-F_1)^{1-\frac{1}{\sigma}} \tag{A28}$$

在最优解处，支出函数可表示为：

$$E\left(P_0,P_1,F_1,W,u\mid Y_1>0\right)=W-F_1+F_1 \tag{A29}$$

根据 A28 替换 A29 中的$W-F_1$，可得：

$$E\left(P_0,P_1,F_1,W,u\mid Y_1>0\right)=F_1+\frac{\lambda_0}{\left(1+1/\Gamma\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}}\left[\frac{u}{1-\theta}\right]^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{A30}$$

当互联网不存在时，$F_1=0$，此时$\Gamma$趋于正无穷，则有：

$$E(P_0,W,u\mid Y_1=0)=\lambda_0\left(\frac{u}{1-\theta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \tag{A31}$$

## 2.2 等价变换计算

在时间利用模型中，互联网产品消费者剩余的等价变换为需要给予消费者多少收入才能使其不享受互联网消费与享受互联网消费时实现的效用一样。于是我们将互联网产品存在时的效用(即$u\left(P_0,P_1,F_1,W,u\mid Y_1>0\right)$)代入互联网产品不存在时的支出函数，并减去原有总支出$W$，即可得互联网消费带来的消费者剩余：

$$\begin{aligned}EV&=E(P_0,W,u\left(P_0,P_1,F_1,W,u\mid Y_1>0\right)\mid Y_1=0)-W\\&=\lambda_0\left(\frac{u}{1-\theta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}-W\end{aligned} \tag{A32}$$

将存在互联网产品时的效用$u=\left(1-\theta\right)\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)Y_0^{1-1/\sigma}$代入 A32，可得：

$$EV=\lambda_0\left(\frac{(1-\theta)\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)Y_0^{1-1/\sigma}}{1-\theta}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}-W$$
$$=\lambda_0 Y_0\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}-W \tag{A33}$$

将 $Y_0=\dfrac{W-F_1}{\lambda_0\left(1+1/\Gamma\right)}$ 代入 A33，可得：

$$EV=(W-F_1)\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}-W$$
$$=W\left[\left(1+\frac{1}{\Gamma}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\left(1-\frac{F_1}{W}\right)-1\right] \tag{A34}$$

由 A16 得到：

$$1+\frac{1}{\Gamma}=(1-\frac{L_1}{\left(1-\frac{F_1}{W}\right)\left(1-\alpha_1\right)})^{-1} \tag{A35}$$

将 A34 代入 A33，又因为 $\alpha_1=0$，可以得到文中公式 5：

$$EV=W\left(\left(1-\frac{L_1}{1-F_1/W}\right)^{\frac{-1}{\sigma-1}}\left(1-F_1/W\right)-1\right) \tag{5}$$

# 附表：

附表 1 上网时间对总收入的回归结果

| 变量 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） | （6） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| log_income | 0.02*** | 0.03*** | 0.02*** | 0.03*** | -0.18*** | -0.11*** |
| | (6.28) | (8.07) | (6.36) | (6.62) | (-13.92) | (-8.40) |
| Education（小学=1，其他=0） | | 0.18*** | | 0.20** | | 0.25 |
| | | (2.66) | | (2.13) | | (1.05) |
| Education（初中=1，其他=0） | | 0.17*** | | 0.13 | | -0.13 |
| | | (2.61) | | (1.43) | | (-0.56) |
| education（高中=1，其他=0） | | 0.13** | | 0.08 | | -0.46** |
| | | (2.06) | | (0.87) | | (-1.98) |
| education（大专=1，其他=0） | | 0.09 | | 0.10 | | -0.68*** |
| | | (1.36) | | (1.08) | | (-2.91) |
| education（本科=1，其他=0） | | 0.14** | | 0.16* | | -0.69*** |
| | | (2.09) | | (1.68) | | (-2.95) |
| education（研究生=1，其他=0） | | 0.25*** | | 0.21* | | -0.66*** |
| | | (2.78) | | (1.76) | | (-2.69) |
| age | | 0.04*** | | 0.02*** | | -0.01 |
| | | (9.15) | | (4.69) | | (-0.61) |
| age2 | | -0.00*** | | -0.00*** | | 0.00 |
| | | (-9.30) | | (-3.05) | | (1.54) |
| gender | | -0.20*** | | -0.22*** | | -0.00 |
| | | (-13.89) | | (-12.24) | | (-0.14) |
| urban | | -0.02 | | 0.01 | | -0.13*** |
| | | (-1.13) | | (0.55) | | (-3.32) |
| marital | | -0.35*** | | -0.36*** | | -0.10** |
| | | (-11.90) | | (-10.24) | | (-2.17) |
| race | | 0.01 | | -0.02 | | -0.08 |
| | | (0.18) | | (-0.39) | | (-1.28) |
| retire | | -0.03 | | -0.12*** | | -0.05 |
| | | (-0.79) | | (-2.65) | | (-0.52) |
| student | | 1.11*** | | 1.13** | | 1.62*** |
| | | (3.19) | | (2.25) | | (50.71) |
| employment | | 0.27*** | | 0.31*** | | |
| | | (9.03) | | (8.14) | | |
| Constant | 2.21*** | 1.15*** | 2.47*** | 1.55*** | 3.00*** | 3.02*** |
| | (110.48) | (10.77) | (101.51) | (10.88) | (28.15) | (9.62) |
| Observations | 22,311 | 20,851 | 13,943 | 12,858 | 8,989 | 8,884 |

注：回归系数下方括号里是 t 值；***、**和*表示结果在 1%、5%和 10%水平上显著。