

附录 1

引理 1

参考 Eberl 和 Klar (2020) 的定理 7, 假设 $E(X^6) < \infty$, 则有:

$$\sqrt{N}(\hat{\gamma} - \gamma) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_\gamma^2)$$

其中,

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{\mu_6 - \mu_3^2}{\sigma^6} + \frac{3[(\mu_2^2 - \mu_3\mu_1)(3\mu_2^2 - 2\mu_4 - \mu_3\mu_1) - (\mu_5 - \mu_3\mu_2)(\mu_3 - \mu_2\mu_1)]}{\sigma^8} + \frac{9(\mu_3 - \mu_2\mu_1)^2(\mu_4 + 3\mu_2^2 - 4\mu_3\mu_1)}{4\sigma^{10}}; \mu_k = E(X^k), k = 1, 2, \dots, 5; \sigma^2 = \text{Var}(X).$$

引理 2

参考 Vershynin (2018), 令 $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是参数为 p_i 的伯努利随机变量, 考虑它们的和 $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ 并且用 $\mu = E[S_n]$ 表示 S_n 的均值, 则对于任意 $t > \mu$, 有:

$$P(S_n \geq t) \leq e^{-\mu} \left(\frac{e\mu}{t} \right)^t.$$

定理 1 的证明:

参照引理 1 以及 Pinelis 和 Molzon(2016)可知, 存在常数 $c > 0$ 使得:

$$\sup \left| P \left(\frac{\sqrt{N}}{\sigma_\gamma} (\hat{\gamma} - \gamma) \leq x \right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c}{\sqrt{N}}$$

* MERGEFORMAT (1)

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布的分布函数。

定义随机变量: $\beta_{n,j} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma_\gamma} (\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma), j = 1, \dots, D$ 。根据式(1), 对于每一个 $j = 1, \dots, D$ 和常数 c_1 都有:

$$\sup \left| P(\beta_{n,j} \leq x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c_1}{\sqrt{n}}$$

* MERGEFORMAT (2)

设 $x = \frac{\sqrt{ny}}{\sigma_\gamma}$, 则 $P(\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma \leq y) \leq \frac{c}{\sqrt{n}} + 1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{ny}}{\sigma_\gamma}\right)$, 其中 $1 - \Phi\left(\frac{\sqrt{ny}}{\sigma_\gamma}\right) \leq e^{-\frac{ny^2}{2\sigma_\gamma^2}}$ 。对于固定

的 $y > 0$, $n \rightarrow \infty$, $e^{-\frac{ny^2}{2\sigma_\gamma^2}}$ 为 $o(n^{-1/2})$ 。因此 $P(\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma \leq y) \leq \frac{c_2}{2\sqrt{n}}$; 同理可以得到:

$$P(\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma \geq y) \leq \frac{c_2}{2\sqrt{n}}$$

* MERGEFORMAT (3)

其中 c_2 是一个依赖于 y 的常数, 综合上述两个不等式有

$$P(|\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma| \leq y) \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}$$

又因为 $|\hat{\gamma}^M - \gamma| \leq \text{median}\{|\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma|, j=1, \dots, D\}$ ，故

$$P(|\hat{\gamma}^M - \gamma| \leq y), P(\text{median}\{|\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma|, j=1, \dots, D\} \leq y) = P(B)$$

定义伯努利随机变量： $\alpha_j = I(|\hat{\gamma}^{(j)} - \gamma| \geq y), j=1, \dots, D$ 。通过式(3)可知 $E\alpha_j, c_2 n^{-1/2}, c_2$ 为大于 0 的常数。事件 B 发生等价于 $\sum_{j=1}^D \alpha_j > \frac{D}{2}$ 。则由引理 2 可得：

$$P(B) = P\left(\sum_{j=1}^D \alpha_j \geq \frac{D}{2}\right) \leq e^{-DE\alpha_1} \left(\frac{2eDc_2 n^{-1/2}}{D}\right)^{D/2} \leq \frac{C}{n^{D/5}}$$

定理 1 证毕。

附录 2

定理 2 的证明

(i) 由于中值函数是连续的, 根据式 (2) 和连续映射定理可直接得出。

(ii) 首先 $\frac{\sqrt{N}}{\sigma_\gamma}(\hat{\gamma}^M - \gamma) = \sqrt{D} \frac{\sqrt{n}}{\sigma_\gamma}(\hat{\gamma}^M - \gamma) = \sqrt{D} \operatorname{median}\{\beta_{n,j}, j=1, \dots, D\}$, 当 D 为奇数时,

$$\begin{aligned} & P\left(\sqrt{D} \operatorname{median}\{\beta_{n,j}, j=1, \dots, D\}, x\right) \\ &= P\left(\sum_{j=1}^D I(\beta_{n,j} \leq xD^{-1/2}) \dots \frac{D+1}{2}\right) \\ &= P\left(\sum_{j=1}^D \zeta_{n,j}(xD^{-1/2}) \dots \frac{D+1}{2}\right) \\ &= P\left(\sqrt{D} \left\{ \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \zeta_{n,j}(xD^{-1/2}) - \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{2\pi D}} \right\} \dots \frac{x}{\sqrt{2\pi}} + O(D^{-1/2})\right) \end{aligned}$$

根据引理可知, 上式趋于 $\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)$ 。当 D 为偶数时,

$$\begin{aligned} & P\left(\sqrt{D} \operatorname{median}\{\beta_{n,j}, j=1, \dots, D\}, x\right) \dots P\left(\sum_{j=1}^D I(\beta_{n,j} \leq xD^{-1/2}) \dots \frac{D}{2} + 1\right) \\ & P\left(\sqrt{D} \operatorname{median}\{\beta_{n,j}, j=1, \dots, D\}, x\right) \dots P\left(\sum_{j=1}^D I(\beta_{n,j} \leq xD^{-1/2}) \dots \frac{D}{2}\right) \end{aligned}$$

当 $D \rightarrow \infty$ 时, 以上两个不等式的右边都趋于 $\Phi\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right)$, 定理 2 证毕。

附录 3

定理 3 的证明

$$\lambda \text{ 满足 } \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \frac{Z_j - 0.5}{1 + \lambda(Z_j - 0.5)} = 0, \quad \text{定义 } U_j = \lambda(Z_j - 0.5), \text{ 可得 } \bar{Z}_j - 0.5 = \lambda \tilde{S}, \text{ 其中}$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \frac{(Z_j - 0.5)^2}{1 + U_j}, \quad \bar{Z}_j = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D Z_j.$$

$$\text{引入记号 } S = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D (Z_j - 0.5)^2 = 0.25, \quad Z_D = \max_{1 \leq j \leq D} |Z_j - 0.5| = 0.5. \text{ 结合前面的约束条件权}$$

重 $\omega_j > 0$, 可以得出 $1 + U_j > 0$, 因此:

$$\lambda S, \lambda \tilde{S} \left(1 + \max_{1 \leq j \leq D} U_j\right), \lambda \tilde{S} (1 + \lambda Z_D) = (\bar{Z}_j - 0.5)(1 + \lambda Z_D)$$

因此 $\lambda [S - (\bar{Z}_j - 0.5)Z_D], \bar{Z}_j - 0.5$, 根据 Owen(1990)有 $\bar{Z}_j - 0.5 = O_p(D^{-1/2})$, 故

$\lambda [0.25 - O_p(D^{-1/2})] = O_p(D^{-1/2})$, 所以 $\lambda = O_p(D^{-1/2})$ 。此外

$$\max_{1 \leq j \leq D} |U_j| = O_p(D^{-1/2}) = o_p(1)$$

接下来对式 (4) 进行展开

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \frac{Z_j - 0.5}{1 + \lambda(Z_j - 0.5)} = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D (Z_j - 0.5) \left\{ 1 - U_j + \frac{U_j^2}{1 + U_j} \right\} \\ &= (\bar{Z}_j - 0.5) - \lambda S + \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \frac{(z_j - 0.5)U_j^2}{1 + U_j} \\ &= (\bar{Z}_j - 0.5) - 0.25\lambda + \frac{1}{D} \sum_{j=1}^D \frac{(z_j - 0.5)U_j^2}{1 + U_j} \end{aligned}$$

对于上式的最后一项有

$$\frac{1}{D} \sum_{j=1}^D |Z_j - 0.5|^3 \lambda^2 |1 + U_j|^{-1} = o(D^{1/2}) O_p(D^{-1}) O_p(1) = o_p(D^{-1/2})$$

因此可以得到 $\lambda = S^{-1}(\bar{Z}_j - 0.5) + \beta = 4(\bar{Z}_j - 0.5) + \beta$, 其中 $\beta = o_p(D^{-1/2})$ 。

对下式进行泰勒展开 $\log(1 + U_j) = U_j - \frac{1}{2}U_j^2 + \eta_j$, 存在有限的 $B > 0$, $1, j, D$, 当 $D \rightarrow \infty$ 时, $P(|\eta_j| \leq B|U_j|^3) \rightarrow 1$ 。下面计算

$$\begin{aligned} -2 \log R(\gamma) &= 2 \sum_{j=1}^D \log(1 + U_j) = 2 \sum_{j=1}^D \left(U_j - \frac{1}{2}U_j^2 + \eta_j \right) \\ &= 4D(\bar{Z}_j - 0.5)^2 - \frac{1}{4}D\beta^2 + 2 \sum_{j=1}^D \eta_j \end{aligned}$$

根据引理可以得出 $4D(\bar{Z}_j - 0.5)^2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)$ 。由于 $\frac{1}{4}D\beta^2 = \frac{1}{4}D o_p(D^{-1}) = o_p(1)$ 。定理 3 证毕。

附表 1 标准正态分布下经验水平和检验功效

N	经验水平		$\gamma = 0.3$ 功效		$\gamma = 0.6$ 功效		$\gamma = 0.9$ 功效	
	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM
100	0.095	0.084	0.314	0.317	0.666	0.736	0.852	0.951
200	0.061	0.048	0.392	0.462	0.861	0.948	0.974	0.999
300	0.059	0.047	0.547	0.607	0.947	0.995	0.992	1.000
400	0.057	0.050	0.649	0.770	0.974	1.000	0.998	1.000
500	0.049	0.046	0.746	0.857	0.989	1.000	0.998	1.000
600	0.066	0.062	0.794	0.909	0.995	1.000	1.000	1.000
700	0.058	0.043	0.854	0.946	1.000	1.000	1.000	1.000
800	0.062	0.042	0.894	0.965	1.000	1.000	1.000	1.000
900	0.051	0.043	0.931	0.979	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	0.058	0.046	0.943	0.987	1.000	1.000	1.000	1.000

附表 2 $t(3)$ 下经验水平和检验功效

N	经验水平		$\gamma = 0.3$ 功效		$\gamma = 0.6$ 功效		$\gamma = 0.9$ 功效	
	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM
100	0.349	0.084	0.362	0.213	0.416	0.471	0.477	0.726
200	0.328	0.042	0.335	0.228	0.393	0.607	0.453	0.929
300	0.316	0.042	0.330	0.301	0.380	0.836	0.450	0.991
400	0.304	0.034	0.335	0.418	0.379	0.940	0.463	0.999
500	0.293	0.062	0.311	0.511	0.391	0.963	0.471	1.000
600	0.264	0.049	0.292	0.582	0.361	0.993	0.440	1.000
700	0.306	0.053	0.325	0.633	0.383	0.993	0.459	1.000
800	0.304	0.051	0.322	0.715	0.383	0.998	0.443	1.000
900	0.285	0.045	0.312	0.740	0.375	1.000	0.439	1.000
1000	0.302	0.066	0.336	0.807	0.396	1.000	0.459	1.000

附表 3 $I(1,1)$ 下经验水平和检验功效								
	经验水平		$\gamma = 0.3$ 功效		$\gamma = 0.6$ 功效		$\gamma = 0.9$ 功效	
N	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM
100	0.133	0.070	0.243	0.259	0.455	0.656	0.620	0.874
200	0.113	0.047	0.245	0.353	0.536	0.877	0.747	0.992
300	0.114	0.045	0.321	0.520	0.640	0.969	0.817	0.999
400	0.109	0.042	0.362	0.616	0.711	0.993	0.882	1.000
500	0.078	0.054	0.391	0.732	0.769	1.000	0.926	1.000
600	0.092	0.054	0.406	0.794	0.819	1.000	0.942	1.000
700	0.079	0.061	0.436	0.865	0.843	1.000	0.945	1.000
800	0.078	0.058	0.449	0.922	0.876	1.000	0.965	1.000
900	0.076	0.040	0.508	0.942	0.877	1.000	0.971	1.000
1000	0.072	0.056	0.537	0.969	0.914	1.000	0.985	1.000

附表 4 混合分布下经验水平和检验功效								
	经验水平		$\gamma = 0.3$ 功效		$\gamma = 0.6$ 功效		$\gamma = 0.9$ 功效	
N	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM	JEL	MoM
100	0.093	0.077	0.345	0.314	0.723	0.779	0.915	0.966
200	0.081	0.049	0.476	0.483	0.896	0.951	0.982	0.998
300	0.066	0.042	0.564	0.656	0.942	0.996	0.993	1.000
400	0.061	0.048	0.720	0.790	0.985	0.998	1.000	1.000
500	0.059	0.059	0.756	0.866	0.994	1.000	1.000	1.000
600	0.050	0.035	0.844	0.927	0.997	1.000	1.000	1.000
700	0.058	0.046	0.878	0.950	1.000	1.000	1.000	1.000
800	0.060	0.045	0.906	0.969	0.999	1.000	1.000	1.000
900	0.053	0.054	0.953	0.989	1.000	1.000	1.000	1.000
1000	0.062	0.055	0.971	0.997	1.000	1.000	1.000	1.000

参考文献

- [1] Eberl A, Klar B. Asymptotic Distributions and Performance of Empirical Skewness Measures [J]. Computational Statistics & Data Analysis, 2020, 146(5):106939
- [2] Vershynin R. High-Dimensional Probability (An Introduction with Applications in Data Science) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2018.
- [3] Pinelis I, Molzon R. Optimal-order Bounds on the Rate of Convergence to Normality in the Multivariate Delta Method [J]. Electronic Journal of Statistics, 2016, 10(1): 1001-1063.
- [4] Owen A. Empirical Likelihood Ratio Confidence Regions [J]. Annals of Statistics, 1990, 18(1): 90-120.