附件

附录 1

当通胀指数服从随机过程$\mathrm{d}I_t=\mu_t I_t\mathrm{d}t+\sigma_t I_t\mathrm{d}W_t^P$时，不妨令$f=\ln(I_t)$，对其进行Itô展开得：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial I_t}\mathrm{d}I_t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial I_t^2}(\mathrm{d}I_t)^2 \tag{A1}$$

由于$\frac{\partial f}{\partial I_t}=\frac{1}{I_t}$，$\frac{\partial^2 f}{\partial I_t^2}=-\frac{1}{I_t^2}$，将其代入式（A1）有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f&=\frac{1}{I_t}\mathrm{d}I_t-\frac{1}{2I_t^2}(\mathrm{d}I_t)^2\\&=\frac{1}{I_t}\left(\mu_t I_t\mathrm{d}t+\sigma_t I_t\mathrm{d}W_t^P\right)-\frac{1}{2I_t^2}\left(\sigma_t^2 I_t^2\mathrm{d}t\right)\\&=\left(\mu_t-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}W_t^P\end{aligned} \tag{A2}$$

即有 $\mathrm{d}ln(I_t)=\left(\mu_t-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}W_t^P$，进而有：

$$\pi_t\approx\left(\mu_t-\frac{1}{2}\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t+\sigma_t\mathrm{d}W_t^P \tag{A3}$$

在离散时间格式下，当取同比数据时，时间间隔$\Delta t=1$，则$t+1$时点通胀在t时点的条件期望和条件方差分别是：

$$E_t(\pi_{t+1})\approx\left(\mu_{t+1}-\frac{1}{2}\sigma_{t+1}^2\right);\ D_t(\pi_{t+1})\approx\sigma_{t+1}^2 \tag{A4}$$

由 Shreve（2010）知，若 $\mathrm{d}X_t=\mu_X X_t\mathrm{d}t+\sigma_X X_t\mathrm{d}W_t$，$\mathrm{d}Y_t=\mu_Y Y_t\mathrm{d}t+\sigma_Y Y_t\mathrm{d}W_t$，令$Z_t=\frac{X_t}{Y_t}$，则有：

$$\frac{\mathrm{d}Z_t}{Z_t}=(\mu_X-\mu_Y+\sigma_Y^2-\sigma_X\sigma_Y)\mathrm{d}t+(\sigma_X-\sigma_Y)\mathrm{d}W_t \tag{A5}$$

由于实际资产价值$\widetilde{N}_t=\frac{N_t}{I_t}$，其中$\mathrm{d}N_t=N_t r_t\mathrm{d}t$，$\mathrm{d}I_t=\mu_t I_t\mathrm{d}t+\sigma_t I_t\mathrm{d}W_t^P$，将$N_t$和$I_t$分别与$X_t$和$Y_t$相互映射，则有$\mu_X=r_t$，$\sigma_X=0$；$\mu_Y=\mu_t$，$\sigma_Y=\sigma_t$，将之代入式（A5）得：

$$\frac{d\widetilde{N}_t}{\widetilde{N}_t}=\left(r_t-\mu_t+\sigma_t^2\right)\mathrm{d}t-\sigma_t\mathrm{d}W_t^P \tag{A6}$$

不妨令$\tilde{\mu}_t=r_t-\mu_t+\sigma_t^2$，$\widetilde{\sigma}_t=-\sigma_t$，则实际风险溢价$\tilde{\lambda}_t=\frac{\tilde{\mu}_t-\tilde{r}_t}{\widetilde{\sigma}_t}=\frac{\tilde{r}_t-\left(r_t-\mu_t+\sigma_t^2\right)}{\sigma_t}$，对其简单变换得$\tilde{r}_t=r_t-\left(\mu_t-\sigma_t^2\right)+\sigma_t\tilde{\lambda}_t$。

附录 2

由 O–U 过程的运动规律知，T 时点通胀的动态结构是：

$$\pi_T=\theta_\pi+(\pi_t-\theta_\pi)e^{-k_\pi\Delta T}+\beta_\pi\int_t^T e^{-k_\pi(T-u)}\,\mathrm{d}W_u^P \tag{A7}$$

且$E_t(\pi_T)=\theta_\pi+(\pi_t-\theta_\pi)e^{-k_\pi\Delta T}$，$D_t(\pi_T)=\frac{\beta_\pi^2}{2k_\pi}\left(1-e^{-2k_\pi\Delta T}\right)$，当 $T=t+1$ 时，有：

$$E_t(\pi_{t+1}) = \theta_\pi + (\pi_t - \theta_\pi)e^{-k_\pi}；\ D_t(\pi_{t+1}) = \frac{\beta_\pi^2}{2k_\pi}\left(1 - e^{-2k_\pi}\right) \tag{A8}$$

附录 3

令$Z_t = exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\tilde{\lambda}_s\right)^2 \mathrm{d}s - \int_0^t \tilde{\lambda}_s \mathrm{d}W_s^P\right\}$，其中 P 表示真实风险概率测度，若Ω为风险中性概率测度，则由 Girsanov 定理知，Z_t是 P 测度与Ω测度的等价鞅测度变换的 Radon–Nikodym 导数，且有 $\mathrm{d}W_t^Q = \mathrm{d}W_t^P + \tilde{\lambda}_t \mathrm{d}t$，将其代入（7）有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\tilde{y}_t &= k_y\left(\theta_y - \tilde{y}_t\right)\mathrm{d}t + \beta_y\left(\mathrm{d}W_t^\Omega - \tilde{\lambda}_t \mathrm{d}t\right) \\ &= \left[k_y\left(\theta_y - \tilde{y}_t\right) - \beta_y \tilde{\lambda}_t\right]\mathrm{d}t + \beta_y \mathrm{d}W_t^\Omega \\ &= k_y\left[\left(\theta_y - \frac{\beta_y}{k_y}\tilde{\lambda}_t\right) - \tilde{y}_t\right]\mathrm{d}t + \beta_y \mathrm{d}W_t^\Omega\end{aligned} \tag{A9}$$

附录4

第一，在低增长和高通胀状态下，确定性情景低估实际利率。在低增长状态下，实际风险溢价大于零（当$\theta_t^Q < \theta_y$时，有$\tilde{\lambda}_t > 0$），产出因素将导致实际利率低估（当$\hat{\tilde{\lambda}}_t > 0$ 时，有$\Delta RR2_t = -\hat{\sigma}_t \hat{\tilde{\lambda}}_t < 0$）；在高通胀状态下，预期通胀低于实际通胀（当$\pi_t > \hat{\theta}_\pi$时，有$\hat{E}_t(\pi_{t+1}) < \pi_t$），通胀因素将导致实际利率低估（$\Delta RR1_t = [\hat{E}_{t-1}(\pi_t) - \pi_t] - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_t^2 < 0$），两者合力使得确定性情景下的实际利率被低估（$\Delta RR_t = \Delta RR1_t + \Delta RR2_t < 0$）。

第二，在低增长和低通胀状态下，若通胀预期偏离度小于其不确定风险补偿效应，则确定性情景仍低估实际利率。首先，低增长状态导致实际利率低估（当$\theta_t^Q < \theta_y$时，有$\tilde{\lambda}_t > 0$，进而有$\Delta RR2_t = -\hat{\sigma}_t \hat{\tilde{\lambda}}_t < 0$）；其次，在低通胀状态下，尽管预期通胀高于实际通胀，但只要通胀预期偏离度小于其不确定风险补偿效应（$\hat{E}_{t-1}(\pi_t) - \pi_t < \frac{1}{2}\hat{\sigma}_t^2$），则通胀因素仍导致实际利率低估（$\Delta RR1_t = [\hat{E}_{t-1}(\pi_t) - \pi_t] - \frac{1}{2}\hat{\sigma}_t^2 < 0$），两者合力使得确定性情景下的实际利率被低估（$\Delta RR_t = \Delta RR1_t + \Delta RR2_t < 0$）。

附录 5

由式（2）知，$\hat{\mu}_t \approx \hat{E}_{t-1}(\pi_t) + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_t^2$，将其代入式（3）有：

$$\hat{\tilde{r}}_t = \left[r_t - \hat{E}_{t-1}(\pi_t)\right] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_t^2 + \hat{\sigma}_t \hat{\tilde{\lambda}}_t \tag{A10}$$

其中，$\hat{\sigma}_t^2 = \frac{\hat{\beta}_\pi^2}{2\hat{k}_\pi}\left(1 - e^{-2\hat{k}_\pi}\right)$，$\hat{\tilde{\lambda}}_t = \frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\ \left(\hat{\theta}_y - \hat{\theta}_t^Q\right)$，$\hat{E}_{t-1}(\pi_t) = \hat{\theta}_\pi + (\pi_{t-1} - \hat{\theta}_\pi)e^{-\hat{k}_\pi}$。假设当前时点是 T，未来时点是 $T + k$（k 是大于零的整数），则 T 和 $T + k$ 时点的实际利率分别是：

$$\hat{\tilde{r}}_T = \left[r_T - \hat{E}_{T-1}(\pi_T)\right] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_T^2 + \hat{\sigma}_T \hat{\tilde{\lambda}}_T \tag{A11}$$

$$\hat{\tilde{r}}_{T+k} = \left[r_{T+k} - \hat{E}_{T+k-1}(\pi_{T+k})\right] + \frac{1}{2}\hat{\sigma}_{T+k}^2 + \hat{\sigma}_{T+k} \hat{\tilde{\lambda}}_{T+k} \tag{A12}$$

将式（A12）与式（A11）相减得：

$$\hat{\hat{r}}_{T+k}-\hat{\hat{r}}_{T}=(r_{T+k}-r_{T})-\left[\hat{E}_{T+k-1}(\pi_{T+k})-\hat{E}_{T-1}(\pi_{T})\right]+\frac{1}{2}\left(\hat{\sigma}_{T+k}^{2}-\hat{\sigma}_{T}^{2}\right)+\left(\hat{\sigma}_{T+k}\hat{\hat{\lambda}}_{T+k}-\hat{\sigma}_{T}\hat{\hat{\lambda}}_{T}\right) \quad \text{（A13）}$$

由 $\hat{E}_{t-1}(\pi_t)=\hat{\theta}_\pi+(\pi_{t-1}-\hat{\theta}_\pi)e^{-\hat{k}_\pi}$ 知，$\hat{E}_{T+k-1}(\pi_{T+k})-\hat{E}_{T-1}(\pi_T)=(\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1})e^{-\hat{k}_\pi}$；由$\hat{\sigma}_t^2=\frac{\hat{\beta}_\pi^2}{2\hat{k}_\pi}\left(1-e^{-2\hat{k}_\pi}\right)$知，$\hat{\sigma}_{T+k}=\hat{\sigma}_T$；由$\hat{\hat{\lambda}}_t=\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\left(\hat{\theta}_y-\hat{\theta}_t^Q\right)$知，$\hat{\sigma}_{T+k}\hat{\hat{\lambda}}_{T+k}-\hat{\sigma}_T\hat{\hat{\lambda}}_T=\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_T^Q-\theta_{T+k}^Q\right)$，将它们分别代入式（A13）得：

$$\hat{\hat{r}}_{T+k}-\hat{\hat{r}}_{T}=(r_{T+k}-r_{T})-\left[(\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1})e^{-\hat{k}_\pi}\right]-\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right) \quad \text{（A14）}$$

可见，两个时点的实际利率变化由三部分构成：名义利率变化的影响（$r_{T+k}-r_T$）；通胀变化的影响（$-\left[(\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1})e^{-\hat{k}_\pi}\right]$）；均衡产出变动的影响（$-\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)$）。

第一，若未来通胀和均衡产出均下行（$\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1}<0$，$\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q<0$），两者对实际利率的净影响大于零（$-\left[(\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1})e^{-\hat{k}_\pi}\right]-\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)>0$）。若为确保实际利率稳定考虑($\hat{\hat{r}}_{T+k}-\hat{\hat{r}}_T\approx 0$)，则有必要降低名义利率，且降息空间($r_{T+k}-r_T$)相当于($\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1})e^{-\hat{k}_\pi}+\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)$，其是维持实际利率稳定的必要条件。

第二，若未来通胀持续围绕其长期趋势水平稳定小幅震荡（如$|\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1}|\to 0^+$），且均衡产出下行（$\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q<0$），则通胀对实际利率的影响趋向于零，产出下行将是实际利率上行的主导因素($\hat{\hat{r}}_{T+k}-\hat{\hat{r}}_T=(r_{T+k}-r_T)-\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)$，其中$-\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)>0$)。若为确保实际利率稳定考虑（$\hat{\hat{r}}_{T+k}-\hat{\hat{r}}_T\approx 0$），则仍倾向于降低名义利率，且降息空间($r_{T+k}-r_T$)相当于$\frac{\hat{k}_y}{\hat{\beta}_y}\hat{\sigma}_T\left(\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q\right)$。

第三，若未来通胀上行（$\pi_{T+k-1}-\pi_{T-1}>0$）、均衡产出下行（$\theta_{T+k}^Q-\theta_T^Q<0$），两者对实际利率变化的影响方向相反，故是否降息是不确定的。