附录：定理的证明

在开始定理的证明之前，需要引入一些数学符号。对任意区间 $\boldsymbol{\Lambda}$ 上的实值函数 h，定义 $\|h\|_{\infty}=\sup\limits_{t\in\boldsymbol{\Lambda}}|h(t)|$。为便于说明，将原文中的式(5)表示成矩阵形式，

$$\boldsymbol{Y}=\lambda\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{X}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\Pi}\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{e} \tag{A1}$$

其中，$\boldsymbol{Y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{W}=\left(w_{i,j}\right)_{i,j=1}^{n}$ 为 $n\times n$ 阶空间加权矩阵，$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{x}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{\Pi}=(\boldsymbol{\pi}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{\pi}_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$；$\boldsymbol{e}=(e_1,\cdots,e_n)^{\mathrm{T}}$。令 $h=K_n^{-1}=O_p(n^{-1/(2r+1)})$，定义参数空间

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Theta}_n(C)=\{\boldsymbol{\vartheta}\,|\,&n^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{Y}(\lambda-\lambda_0)^2+n^{-1}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}_0)+\\&n^{-1}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\gamma}_0)=C(nh)^{-1}\}\end{aligned} \tag{A2}$$

引理：在假设条件[①]A1 下，存在参数向量 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 和某个常数 C，使得

$$\sup_{t\in[a_L,a_U]}|\boldsymbol{B}_l(t)\gamma_0-\theta_l(t)|\le Ch^r \tag{A3}$$

其中 $\mathbf{B}_l(\cdot)$ 表示 $\mathbf{B}(\cdot)$ 的第 l 行元素，$l=1,\cdots,p$。

证明：参见 Schumaker(1981)。

定理 1 的证明：要证明定理 1 的结论成立，只要证明存在任意小正数 $\grave{o}>0$，使得对任意 $\boldsymbol{\vartheta}\in\boldsymbol{\Theta}_n(C)$ 有，

$$\Pr\left\{\inf_{\boldsymbol{\vartheta}\in\boldsymbol{\Theta}_n(C)}Q_n(\boldsymbol{\vartheta})>Q_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)\right\}>1-\grave{o} \tag{A4}$$

注意到，

$$\begin{aligned}Q_n(\boldsymbol{\vartheta})-Q_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)=&[g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}[g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)]\\&+2g_n^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\vartheta}_0)\boldsymbol{C}_n^{-1}[g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)]\end{aligned} \tag{A5}$$

记 $\boldsymbol{\Xi}_i=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}w_{i,j}y_j,\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}$。由 Wang 和 Sun(2020)知，

$$\begin{aligned}g(\boldsymbol{\vartheta}_0)&=\mathrm{E}[g(\boldsymbol{\vartheta}_0)]+o_p(n^{-1/2})\\&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\Pr(y_i-\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}_0\le 0)]+o_p(n^{-1/2})\end{aligned} \tag{A6}$$

由于 $y_i-\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}_0=e_i+\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(u_i)-\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_0$，记 $R_i=\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(u_i)-\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_0$，则式(A6)可表示为

$$\begin{aligned}g(\vartheta_0)&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\Pr(e_i\le R_i)]+o_p(n^{-1/2})\\&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\mathrm{F}_i(0)-\mathrm{F}_i(R_i)]+o_p(n^{-1/2})\end{aligned}$$

---

① 具体的假设条件请参见原文，下同。

$$= -n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)R_i + O_p(\sup_i \| R_i \|^2) + o_p(n^{-1/2}) \tag{A7}$$

其中 $\mathrm{F}_i(\cdot)$ 表示误差项 e_i 的累积分布函数。由上文引理、假设条件 A3、A4 及 Cauchy-Schwarzt 不等式，存在某个常数 $c_1 > 0$ 使得

$$\begin{aligned} n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)R_i &\le \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}\right)^{1/2}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(0)R_i^2\right)^{1/2} \\ &\le c_1\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} f_i(0)R_i^2\right)^{1/2} \le c_1 \sup_i \| R_i \| = c_1 C h^r \end{aligned} \tag{A8}$$

结合 $O_p(\sup_i \| R_i \|^2) = O_p(h^{2r})$ 及式(A7)可知，$\| g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0) \| = O_p(h^r)$ 。令 $\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}_0$，对于任意 $\boldsymbol{\vartheta} \in \boldsymbol{\Theta}_n(C)$，类似于式(A7)有，

$$\begin{aligned} g_n(\boldsymbol{\vartheta}) - g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0) &= n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\mathrm{F}_i(0) - \mathrm{F}_i(\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + R_i)] - n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\mathrm{F}_i(0) - \mathrm{F}_i(R_i)] + o_p(n^{-1/2}) \\ &= n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta} + O_p(\| \boldsymbol{\delta} \|^2 + \sup_i \| R_i \|^2) + o_p(n^{-1/2}) \\ &\le \left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}\right)^{1/2}\left(\boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Xi}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\delta}\right)^{1/2} \\ &\quad + O_p\left(\| \boldsymbol{\delta} \|^2 + \sup_i \| R_i \|^2\right) + o_p(n^{-1/2}) \end{aligned} \tag{A9}$$

假设条件 A3 和 A7 表明，存在某个常数 $c_2 > 0$ 使得，

$$\begin{aligned} & n^{-1}(\boldsymbol{WY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WY} = n^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WY} \\ & = n^{-1}\left(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{X\beta}_0 + \boldsymbol{\Pi\gamma}_0 + \boldsymbol{R}\right)^{\mathrm{T}}[\mathbf{I} - \lambda_0\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{W}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}[\mathbf{I} - \lambda_0\boldsymbol{W}]^{-1}\left(\boldsymbol{e} + \boldsymbol{X\beta}_0 + \boldsymbol{\Pi\gamma}_0 + \boldsymbol{R}\right) \\ & \le c_2\left(n^{-1}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} + n^{-1}\boldsymbol{\beta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X\beta}_0 + n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi\gamma}_0 + n^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}\right) \end{aligned} \tag{A10}$$

由假设条件 A2 易知 $n^{-1}\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} = O_p(1)$，假设条件 A3 易知 $n^{-1}\boldsymbol{\beta}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X\beta}_0 = O_p(1)$，假设条件 A3 及 B 样条函数性质可知 $n^{-1}\boldsymbol{\gamma}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi\gamma}_0 = O_p(K_n^{-1})$，引理表明 $n^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} = O_p(h^{2r})$。综上所述表明，$n^{-1}(\boldsymbol{WY})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WY} = O_p(1)$，则 $n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\Xi}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}} = O_p(1)$。式(A9)说明 $g_n(\boldsymbol{\vartheta}) - g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0) \le c_2 \| \boldsymbol{\delta} \|$。

结合式(A6)-(A10)及假设条件 A4 说明，存在常数 $c_3 > 0$ 和 $C_1 > 0$ 使得

$$\left| g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)\mathbf{C}_n^{-1}[g_n(\boldsymbol{\vartheta}) - g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)] \right| \le c_3 \| g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0) \| \ \| g_n(\boldsymbol{\vartheta}) - g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0) \| \le \frac{C_1 C h^r}{\sqrt{nh}} \tag{A11}$$

另一方面，取 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{\delta} / \| \boldsymbol{\delta} \|_2$，$\| \cdot \|_2$ 表示欧几里得模。则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left(g_n(\boldsymbol{\vartheta}) - g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)\right) &= \boldsymbol{\delta}^{\mathrm{T}}\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\delta} / \| \boldsymbol{\delta} \|_2 + \\ & O_p(\| \boldsymbol{\delta} \|^2 + \sup_i \| R_i \|^2) + o_p(n^{-1/2}) \end{aligned} \tag{A12}$$

记 $\boldsymbol{V} = (v_1^{\mathrm{T}}, \cdots, v_n^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$。由于 $\boldsymbol{V}$ 为 $\boldsymbol{WY}$ 的工具变量，本文中取 $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{W}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Z})$，利用工具变量

的性质易知，$n^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{WY}=O_p(1)$，$n^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X\beta}_0=O_p(1)$，$n^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi\gamma}_0=O_p(1)$，$n^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}=o_p(1)$，$n^{-1}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=o_p(1)$。综上表明，$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\Xi_i^{\mathrm{T}}=O_p(1)$。这表明存在常数 c_4 使得

$$\boldsymbol{\delta}'\left[n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\right]\boldsymbol{\delta}/\|\boldsymbol{\delta}\|_2\geq c_4\|\boldsymbol{\delta}\|^2/\|\boldsymbol{\delta}\|_2\geq c_4\|\boldsymbol{\delta}\| \tag{A13}$$

式(A13)说明 $\left\|g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)\right\|=\sup_{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}=1}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\left(g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)\right)\geq c_5C/\sqrt{nh}$。因此，存在常数 C_2 使得

$$[g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}[g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_n(\boldsymbol{\vartheta}_0)]\geq\frac{C_2C^2}{nh} \tag{A14}$$

结合式(A11)和(A14)说明，可以选择 $C>C_1/C_2$ 使得式(A4)的结论成立。

由于 $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n$ 最小化 $Q_n(\boldsymbol{\vartheta})$，因此式(A4)表明 $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n\notin\Theta_n(C)$，即有 $\|\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n-\boldsymbol{\vartheta}\|=O_p(\sqrt{\frac{k_n}{n}}+k_n^{-r})$ 成立。由假设条件 A3 可知，$n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{\theta}_l(u_i)-\theta_l(u_i))^2\leq\|\boldsymbol{\vartheta}_n-\boldsymbol{\vartheta}\|=O_p(\frac{k_n}{n}+k_n^{-2r})$，定理 1 的结论成立。

定理 2 的证明：令 $g_0=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\mathrm{I}(e_i,0)]$，$Q_0=g_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}g_0$。易知，

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n=\arg\min_{\boldsymbol{\vartheta}}Q_n(\boldsymbol{\vartheta})=\arg\min_{\boldsymbol{\vartheta}}\{Q_n(\boldsymbol{\vartheta})-Q_0\} \tag{A15}$$

注意到，

$$Q_n(\boldsymbol{\vartheta})-Q_0=(g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_0)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_0)+2g_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(g_n(\boldsymbol{\vartheta})-g_0) \tag{A16}$$

令 $\boldsymbol{\delta}_n=\boldsymbol{\vartheta}_n-\boldsymbol{\vartheta}_0$，$R_i=\boldsymbol{z}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\theta}(u_i)-\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\gamma}_0$，由 Wang 和 Sun(2020)中的式(6.1)知，

$$\begin{aligned}g_n(\boldsymbol{\vartheta}_n)-g_0&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\mathrm{I}(y_i-\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}_n,0)]-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\mathrm{I}(e_i,0)]\\&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\Pr(y_i-\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta}_n,0)]+o_p(n^{-1/2})\\&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\tau-\Pr(e_i,\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_n+R_i)]+o_p(n^{-1/2})\\&=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i[\mathrm{F}_i(0)-\mathrm{F}_i(\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_n+R_i)]+o_p(n^{-1/2})\\&=-n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)(\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}_n+R_i)+O_p(\|\boldsymbol{\delta}\|^2)+O_p(\sup_i\|R_i\|^2)+o_p(n^{-1/2})\end{aligned} \tag{A17}$$

将式(A17)代入式(A16)中，

$$\begin{aligned}Q_n(\boldsymbol{\vartheta}_n)-Q_0=&\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\delta}_n-\\&2g_0^{\mathrm{T}}(n^{-1}\boldsymbol{C}_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\delta}_n-2g_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})R_i+O_p(h^{2r})\end{aligned} \tag{A18}$$

对于 g_0 可知，$E(g_0)=0$，$Var(g_0)=\tau(1-\tau)n^{-2}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}_n<\infty$，由此可知，$\|g_0\|=O_p(n^{-1/2})$。结合假设条件 A3 和 A4 可得，$|g_0^{\mathrm{T}}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})R_i|=O_p(n^{-1/2}h^r)$。则式(A18)可表示为

$$\begin{aligned}Q_n(\boldsymbol{\vartheta}_n)-Q_0=&\boldsymbol{\delta}_n^{\mathrm{T}}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\delta}_n-\\&2g_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\delta}_n+O_p(n^{-1/2}h^r)+O_p(h^{2r})\end{aligned}\tag{A19}$$

最小化式(A19)，立即可得

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n-\boldsymbol{\vartheta}_0&=\left[(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})\right]^{-1}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}g_0+o_p(n^{-1/2})\\&=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{1,1}&\boldsymbol{\Sigma}_{1,2}\\\boldsymbol{\Sigma}_{2,1}&\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_{i1}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}g_0\\(n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}g_0\end{pmatrix}+o_p(n^{-1/2})\end{aligned}\tag{A20}$$

式(A20)表明，

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{1,n}-\boldsymbol{\vartheta}_{1,0}=\left(\boldsymbol{\Sigma}_{1,1}-\boldsymbol{\Sigma}_{1,2}\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{2,1}\right)^{-1}\left\{n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)[\boldsymbol{\Xi}_{1i}-\boldsymbol{\Sigma}_{1,2}\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1}\boldsymbol{\pi}_i]^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}g_0+o_p(n^{-1/2})\tag{A21}$$

记 $\boldsymbol{D}_1=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)(\boldsymbol{\Xi}_{1i}-\boldsymbol{\Sigma}_{1,2}\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1}\boldsymbol{\pi}_i)^{\mathrm{T}}$，经过简单计算知，$\boldsymbol{\Sigma}_{1,1}-\boldsymbol{\Sigma}_{1,2}\boldsymbol{\Sigma}_{2,2}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{2,1}=\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1$。则式(A21)可改写为

$$\sqrt{n}\left(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{1,n}-\boldsymbol{\vartheta}_{1,0}\right)=\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\sqrt{n}g_0+o_p(1)\tag{A22}$$

为证明参数估计量 $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{1,n}$ 的渐近正态性，任取 $\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^{1+d}$ 且 $\boldsymbol{c}'\boldsymbol{c}=1$，$\boldsymbol{R}$ 表示实数集, 则由式(A22)可得，

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}[\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{1,n}-\boldsymbol{\vartheta}_{1,0})]=\sum_{i=1}^{n}a_i\eta_i\tag{A23}$$

其中，$a_i^2=\left(n^{-1/2}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{\mu}_i\sqrt{\tau-\tau^2}\right)^{\otimes 2}$，$A^{\otimes 2}$ 表示 AA^{T}，$\{\eta_i\}_{i=1}^{n}$ 为均值为 0、方差为 1 的独立同分布序列。

事实上，$\boldsymbol{D}_1$ 为 $\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_{1i}^{\mathrm{T}}$ 对 $\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\pi}_1^{\mathrm{T}}$ 的回归残差均值，由引理并结合假设条件 A3、A4 可知，$\|\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_{1i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\mu}_i f_i(0)\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\|=K_n^{1/2}\|\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\Xi}_{1i}^{\mathrm{T}}-\mu_i f_i(0)\boldsymbol{\pi}_i^{\mathrm{T}}\|_\infty=O_p(K_n^{-\ell+1/2})$，$\ell$ 的定义见假设条件 A3，这表明 $\|\boldsymbol{D}_1\|=O_p(K_n^{-\ell+1/2})$，又注意到，$\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1=O_p(1)$，因此，

$$\max_i a_i^2=\max_i\{n^{-1/2}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{\mu}_i\sqrt{\tau-\tau^2}\}^{\otimes 2}$$

$$
\begin{aligned}
&= n^{-1}(\tau-\tau^2)\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\max_i\{\boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\mu}_i^{\mathrm{T}}\}\mathbf{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}c \\
&= O_p(n^{-1}K_n^{-2\ell+1})
\end{aligned}
$$

又 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\left(\boldsymbol{D}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_n^{-1}\boldsymbol{D}_1\right)^{-1}=O_p(1)$ ， 则 $\max_i a_i^2/\sum_{i=1}^{n}a_i^2=o_p(1)$ ， 符 合 Linderberg 条 件 ， 由 Linderberg-Feller 中心极限定理可知，

$$
[\sum_{i=1}^{n}a_i^2]^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}a_i\grave{o}_i\xrightarrow{L}N(0,1)
$$

由 $\boldsymbol{c}$ 的任意性知，定理 2 的结论成立。

附表 1 和 2 估计方法在 Rook 矩阵下有限样本的表现

附表 3 异方差下三种估计方法的模拟比较结果

附表 1 Rook 矩阵下参数估计量的表现

			$n=50$		$n=100$		$n=200$	
λ_0 值	τ 值	参数	MAD	SE	MAD	SE	MAD	SE
$\lambda_0=0.3$	$\tau=0.25$	λ	0.0255	0.0328	0.0150	0.0188	0.0104	0.0131
		β_1	0.0242	0.0307	0.0164	0.0205	0.0117	0.0146
		β_2	0.0663	0.0853	0.0473	0.0592	0.0247	0.0312
	$\tau=0.5$	λ	0.0235	0.0298	0.0128	0.0163	0.0095	0.0122
		β_1	0.0228	0.0288	0.0154	0.0190	0.0106	0.0133
		β_2	0.0626	0.0626	0.0408	0.0513	0.0234	0.0289
	$\tau=0.75$	λ	0.0271	0.0331	0.0157	0.0194	0.0110	0.0139
		β_1	0.0255	0.0316	0.0165	0.0211	0.0120	0.0150
		β_2	0.0618	0.0792	0.0475	0.0586	0.0241	0.0304
$\lambda_0=0.8$	$\tau=0.25$	λ	0.0065	0.0080	0.0061	0.0078	0.0039	0.0049
		β_1	0.0185	0.0236	0.0172	0.0214	0.0122	0.0154
		β_2	0.0484	0.0605	0.0438	0.0542	0.0250	0.0310
	$\tau=0.5$	λ	0.0057	0.0072	0.0060	0.0075	0.0034	0.0043
		β_1	0.0161	0.0204	0.0149	0.0189	0.0103	0.0128
		β_2	0.0438	0.0554	0.0369	0.0464	0.0232	0.0287
	$\tau=0.75$	λ	0.0068	0.0087	0.0053	0.0066	0.0041	0.0051
		β_1	0.0187	0.0238	0.0137	0.0178	0.0115	0.0143
		β_2	0.0525	0.0654	0.0365	0.0465	0.0244	0.0304

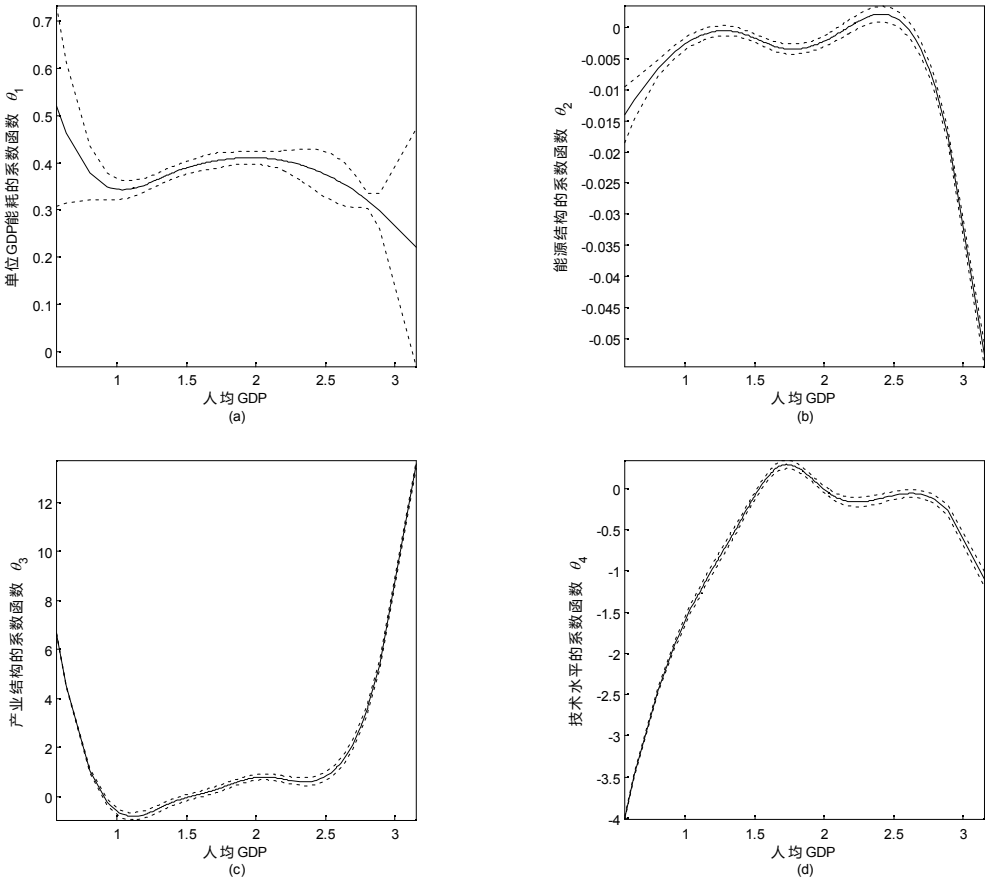
附表 2 Rook 矩阵下系数函数估计量的表现

		$n=50$		$n=100$		$n=200$	
λ_0 值	τ 值	$RMSE_1$	$RMSE_2$	$RMSE_1$	$RMSE_2$	$RMSE_1$	$RMSE_2$
$\lambda_0=0.3$	$\tau=0.25$	0.2867	0.1686	0.1040	0.1073	0.0689	0.0739
	$\tau=0.5$	0.2400	0.1456	0.0923	0.0979	0.0621	0.0665
	$\tau=0.75$	0.2813	0.1670	0.1025	0.1089	0.0685	0.0755
$\lambda_0=0.8$	$\tau=0.25$	0.1819	0.1461	0.1006	0.1078	0.0703	0.0703
	$\tau=0.5$	0.1464	0.1202	0.0901	0.0986	0.0632	0.0635
	$\tau=0.75$	0.1711	0.1420	0.1029	0.1083	0.0705	0.0701

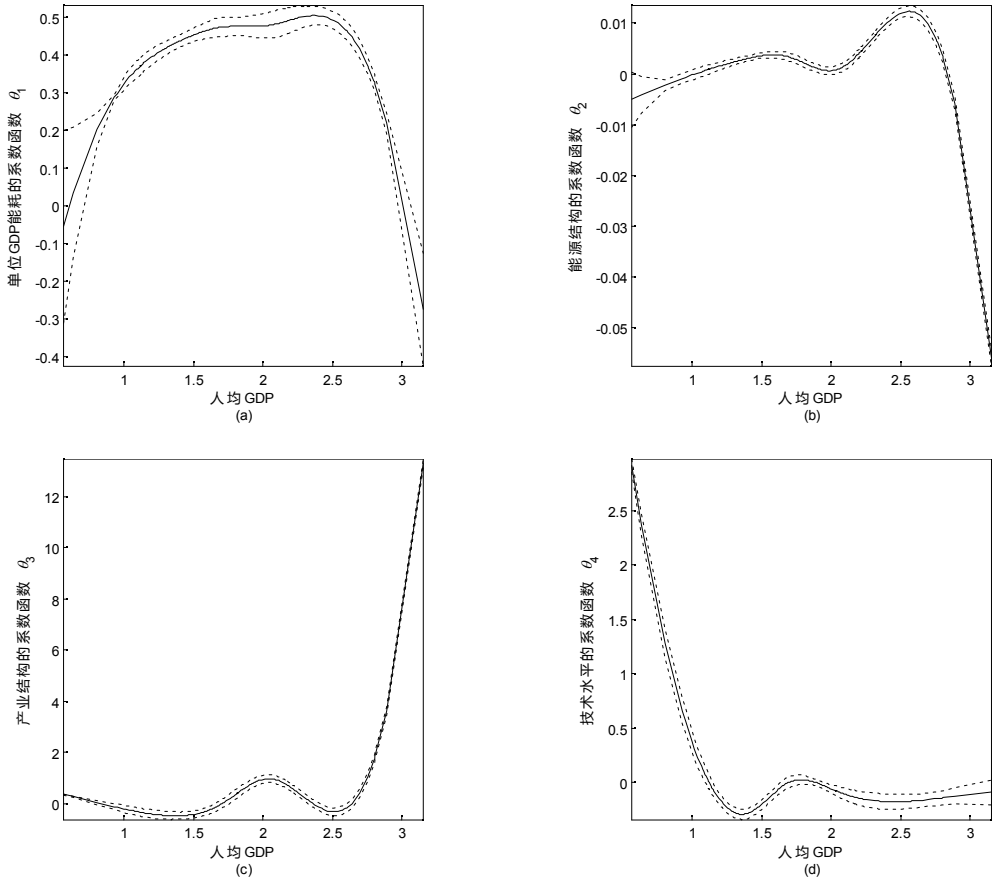
附表 3 异方差下三种方法的模拟比较

n	参数/函数	指标	本文估计方法			IVQR 法			BQR 法		
			$\tau=0.25$	$\tau=0.5$	$\tau=0.75$	$\tau=0.25$	$\tau=0.5$	$\tau=0.75$	$\tau=0.25$	$\tau=0.5$	$\tau=0.75$
100	λ	RMSE	0.0820	0.0830	0.1048	0.1289	0.1197	0.1289	0.0657	0.0721	0.0660
	β	RMSE	0.1140	0.1036	0.1291	0.1326	0.1155	0.1325	0.1150	0.1104	0.1183
	$\theta_1(\cdot)$	MADE_1	0.1396	0.0878	0.1863	0.2317	0.1989	0.2405	0.1969	0.1700	0.2153
	$\theta_2(\cdot)$	MADE_2	0.1266	0.1129	0.1433	0.2004	0.1775	0.2030	0.1727	0.1638	0.1970
200	λ	RMSE	0.0588	0.0661	0.0750	0.0801	0.0740	0.0907	0.0442	0.0484	0.0438
	β	RMSE	0.0902	0.0626	0.0736	0.0819	0.0736	0.0839	0.0795	0.0703	0.0786
	$\theta_1(\cdot)$	MADE_1	0.0912	0.0582	0.1013	0.1406	0.1139	0.1403	0.1338	0.1034	0.1400
	$\theta_2(\cdot)$	MADE_2	0.0864	0.0721	0.0961	0.1256	0.1117	0.1235	0.1225	0.1114	0.1206
500	λ	RMSE	0.0430	0.0510	0.0458	0.0440	0.0429	0.0517	0.0257	0.0277	0.0269
	β	RMSE	0.0461	0.0388	0.0422	0.0476	0.0420	0.0484	0.0465	0.0418	0.0469
	$\theta_1(\cdot)$	MADE_1	0.0684	0.0284	0.0677	0.0757	0.0582	0.0766	0.0740	0.0545	0.0761
	$\theta_2(\cdot)$	MADE_2	0.0625	0.0504	0.0574	0.0706	0.0628	0.0715	0.0682	0.0619	0.0678
800	λ	RMSE	0.0368	0.0391	0.0365	0.0326	0.0340	0.0380	0.0192	0.0213	0.0211
	β	RMSE	0.0351	0.0316	0.0368	0.0358	0.0317	0.0346	0.0352	0.0311	0.0343
	$\theta_1(\cdot)$	MADE_1	0.0502	0.0254	0.0444	0.0582	0.0402	0.0585	0.0554	0.0369	0.0575
	$\theta_2(\cdot)$	MADE_2	0.0489	0.0457	0.0466	0.0521	0.0483	0.0526	0.0499	0.0467	0.0504

附图 1 和附图 2



附图 1 分位数为 0.5 下各系数函数估计图



附图 2　分位数为 0.75 下各系数函数估计图