附录 1

本附录先给出 4 个引理证明，然后利用引理来证明定理 1~5。证明中的数学符号均沿用正文中的定义，即：$\boldsymbol{I}_d$ 表示 $d\times d$ 维的单位方阵，$\boldsymbol{0}_d$ 表示 $d\times d$ 的零矩阵。对于 $d\times d$ 维矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^{(i,j)}$ 表示其第 (i,j) 个元素，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示其转置，$\mathrm{vech}(\boldsymbol{A})$ 是堆叠 $\boldsymbol{A}$ 的下三角部分（包括对角线）所有列得到的向量，而 $\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$ 是堆叠 $\boldsymbol{A}$ 的所有列得到的向量，$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$ 和 $\mathrm{vech}(\boldsymbol{A})$ 之间有如下关系：$\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{D}_d\mathrm{vech}(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{D}_d$ 为 $d^2\times d(d+1)/2$ 维复制矩阵，$\mathrm{vech}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{L}_d\mathrm{vec}(\boldsymbol{A})$，$\boldsymbol{L}_d$ 为 $d(d+1)/2\times d^2$ 维消除矩阵，$\boldsymbol{D}_d$ 和 $\boldsymbol{L}_d$ 之间满足 $\boldsymbol{L}_d=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}$。$\|\boldsymbol{A}\|=\left[trace\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\right)\right]^{1/2}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的 Frobenius 范数，其中 $trace(\cdot)$ 表示迹运算符。$\mathbf{BM}(r)=\left[\mathrm{B}_1(r),\ldots,\mathrm{B}_d(r)\right]^{\mathrm{T}}$，$r\in[0,1]$，表示 d 维布朗运动。每个 $\mathrm{B}_i(\cdot)$ 为单变量标准布朗运动，并且对于 $i\neq j$，有 $\mathrm{B}_i(r)$ 和 $\mathrm{B}_j(r)$ 相互独立。“$\xrightarrow{d}$” 表示依分布收敛，“$\xrightarrow{p}$”表示依概率收敛。$\otimes$ 表示 Kronecker 积，符号 $\lfloor x\rfloor$ 表示对 x 取整数。

引理 1：在假设 2 下，有 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}\xrightarrow{d}\underline{\mathbf{BM}}_{\Sigma}(r)+\sqrt{T}\,\mathrm{vech}\left[\int_0^r\boldsymbol{\Sigma}(s)\mathrm{d}s-r\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(s)\mathrm{d}s\right]$。其中，$\underline{\mathbf{BM}}_{\Sigma}(r)=\mathbf{BM}_{\Sigma}(r)-r\mathbf{BM}_{\Sigma}(1)$，$\mathbf{BM}_{\Sigma}(r)=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\int_0^r\left[\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mathbf{BM}(s)$，$\mathbf{BM}(\cdot)$ 为 $d(d+1)/2$ 维标准布朗运动。

证明：令 $\boldsymbol{e}_t=\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Sigma}_t$ 和 $\boldsymbol{S}_{\lfloor Tr\rfloor}=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}(\boldsymbol{e}_t)$，那么有 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=\boldsymbol{S}_{\lfloor Tr\rfloor}-r\boldsymbol{S}_T+\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t)-\frac{r}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t)$。对于 $\boldsymbol{S}_{\lfloor Tr\rfloor}$，有

$$\boldsymbol{S}_{\lfloor Tr\rfloor}=\frac{\boldsymbol{L}_d}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vec}\left[\boldsymbol{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_d\right)\boldsymbol{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\right]=\frac{\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\otimes\boldsymbol{\Sigma}_t^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_d\right)\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_d\right)。$$

运用 Hansen (1992)中定理 2.1，得 $\boldsymbol{S}_{\lfloor Tr\rfloor}\xrightarrow{d}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\int_0^r\left[\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mathbf{BM}(s)$。其中，$\boldsymbol{\Lambda}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Gamma}(i)$，$\boldsymbol{\Gamma}(i)=E\left\{\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+i}\boldsymbol{\varepsilon}_{t+i}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_d\right)\left[\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_t^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{I}_d\right)\right]^{\mathrm{T}}\right\}$。另外，易得 $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma}_t)\to\sqrt{T}\int_0^r\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)\right]\mathrm{d}s$。

结合以上结论，可得引理1，证毕。

引理2：在假设1下，有 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+\boldsymbol{o}_p(1)$。

证明：由 $\hat{\boldsymbol{u}}_t=\boldsymbol{u}_t-\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)$，可得：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_t\hat{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}\right)-\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left[\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}\right]\\
&-\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{u}_t\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\right]\\
&+\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left[\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\right]\\
&=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}\right)-\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{A}_2+\boldsymbol{A}_3
\end{aligned}\tag{1}$$

对于 $\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}_2$ 和 $\boldsymbol{A}_3$，可写为：

$$\boldsymbol{A}_1=\frac{\boldsymbol{L}_d}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left[\boldsymbol{u}_t\otimes\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\right]\mathrm{vec}\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\tag{2}$$

$$\boldsymbol{A}_2=\frac{\boldsymbol{L}_d}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left[\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\otimes\boldsymbol{u}_t\right]\mathrm{vec}\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\tag{3}$$

$$\boldsymbol{A}_3=\frac{\boldsymbol{L}_d}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left[\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\otimes\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\right]\mathrm{vec}\left[\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\right]\tag{4}$$

在假设1和2下，对于任意 $r\in(0,1]$，容易证得：

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\boldsymbol{u}_t\otimes\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)=O_p(1)\tag{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\otimes\boldsymbol{u}_t=O_p(1)\tag{6}$$

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\otimes\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)=O_p(1)\tag{7}$$

另外，由Patilea和Raïssi(2012)可知 $\sqrt{T}\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)=O_p(1)$。综上得 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_3=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$，因此，有 $\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left(\hat{\boldsymbol{u}}_t\hat{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{T}}\right)=\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{\lfloor Tr\rfloor}\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}\right)+o_p(1)$，进而有 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)$，证毕。

引理3：在假设1和假设3下，(i)当 H_0 成立时，有 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$；(ii)当 H_A 成立时，有 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+q_T\boldsymbol{\Phi}+o_p(1)$，其中，$\boldsymbol{\Omega}=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left[\int_0^1\left[\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{\Lambda}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\otimes\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\right]\mathrm{d}s\right]\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}=\int_0^1\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\left\{\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\right\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s$。

证明：已知 $\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\sum_{i=-T+1}^{T-1}l\left(\frac{i}{q_T}\right)\hat{\boldsymbol{\gamma}}(i)$，其中，$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(i)=\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\hat{\boldsymbol{e}}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}$。定义 $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(i)=\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\tilde{\boldsymbol{e}}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}$。其中，$\tilde{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}-\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}$。通过与引理2中类似的推理可得 $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\hat{\boldsymbol{u}}_t\hat{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{T}}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$。

那么有：

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{e}}_t &= \tilde{\boldsymbol{e}}_t - \boldsymbol{u}_t\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)-\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}} \\ &+\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\end{aligned} \tag{8}$$

在假设1和2下，使用$\sqrt{T}\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)=O_p(1)$，并借助于柯西斯瓦兹不等式可证得：无论在$H_0$还是$H_A$下，对于任意整数$i$都有$\hat{\boldsymbol{\gamma}}(i)=\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(i)+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$。定义$\boldsymbol{\Omega}^*=\sum_{i=-T+1}^{T-1}l\left(\frac{i}{q_T}\right)\boldsymbol{\gamma}^*(i)$，$\boldsymbol{\gamma}^*(i)=\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}(\boldsymbol{e}_t)\left[\mathrm{vech}(\boldsymbol{e}_{t-i})\right]^{\mathrm{T}}$。改写$\tilde{\boldsymbol{e}}_t$为$\tilde{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{e}_t-\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\boldsymbol{u}_t\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Sigma}_t\right)$。在$H_0$下，很显然$\tilde{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{e}_t+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$，那么对于任意整数$i$，都有$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(i)=\boldsymbol{\gamma}^*(i)+O_p\left(\frac{1}{T}\right)$，进一步有$\left\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}(i)-\boldsymbol{\gamma}^*(i)\right\|=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$。因此$\left\|\hat{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^*\right\|\leq\sup_i\left\|\hat{\boldsymbol{\gamma}}(i)-\boldsymbol{\gamma}^*(i)\right\|\sum_{i=-T+1}^{T-1}l\left(\frac{i}{q_T}\right)=O_p\left(\frac{q_T}{\sqrt{T}}\right)$。其中，在假设3（i）下，根据Jansson（2002）引理1，可得$q_T^{-1}\sum_{i=-T+1}^{T-1}\left|l(i/q_T)\right|<\infty$。由假设3（ii）可得：$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}^*+o_p(1)$。另外，与Cavaliere（2005）中引理4的证明类似，可得$\boldsymbol{\Omega}^*=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$。因此，在原假设下，有$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$。

在H_A下，显然有$\tilde{\boldsymbol{e}}_t=\boldsymbol{e}_t-\left[\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r-\boldsymbol{\Sigma}_t\right]+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$。记$\boldsymbol{\Phi}=\int_0^1\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\left\{\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\right\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s$，那么有$\tilde{\boldsymbol{\gamma}}(i)=\boldsymbol{\gamma}^*(i)+\boldsymbol{\Phi}+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)$。进一步在假设3下，有$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}^*+q_T\boldsymbol{\Phi}+o_p(1)$。另外，仍可得$\boldsymbol{\Omega}^*=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$，因此，$\hat{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+q_T\boldsymbol{\Phi}+o_p(1)$，证毕。

引理4：在假设1、假设4~6下，当H_0或H_A成立时，都有$\breve{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+\boldsymbol{o}_p(1)$，其中，$\boldsymbol{\Omega}=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left\{\int_0^1\left[\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{\Lambda}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\otimes\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}$。

证明：因为$\breve{\boldsymbol{e}}_t=\hat{\boldsymbol{u}}_t\hat{\boldsymbol{u}}_t^{\mathrm{T}}-\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t$，进一步可改写为：

$$\begin{aligned}\breve{\boldsymbol{e}}_t &= \boldsymbol{e}_t - \boldsymbol{u}_t\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)-\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\boldsymbol{u}_t^{\mathrm{T}} \\ &+\left(\boldsymbol{X}_{t-1}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{X}_{t-1}\otimes\boldsymbol{I}_d\right)-\left(\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\right)\end{aligned} \tag{9}$$

在假设1和2下，使用$\sqrt{T}\left(\hat{\boldsymbol{\Pi}}-\boldsymbol{\Pi}\right)=O_p(1)$，并借助于柯西斯瓦兹不等式可证得：

$$
\begin{aligned}
&\breve{\boldsymbol{\gamma}}(i)=T^{-1}\sum\nolimits_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{e}}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{e}}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
&=\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{e}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{e}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}-\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{e}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_{t-i}-\boldsymbol{\Sigma}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
&-\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\boldsymbol{e}_{t-i}\right)\right]^{\mathrm{T}}\\
&+\frac{1}{T}\sum_{t=i+1}^{T}\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\right)\left[\mathrm{vech}\left(\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\right)\right]^{\mathrm{T}}+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)\\
&=\boldsymbol{\gamma}^*(i)-\boldsymbol{B}_1-\boldsymbol{B}_2+\boldsymbol{B}_3+O_p\left(\frac{1}{\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

对于 $\boldsymbol{\Sigma}_t=\boldsymbol{\Sigma}(t/T)$，首先在 t/T 点处，对 $\boldsymbol{\Sigma}(s/T)$ 进行二阶泰勒展开可得：

$$
\boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{s}{T}\right)=\boldsymbol{\Sigma}\left(\frac{t}{T}\right)+\boldsymbol{\Sigma}'\left(\frac{t}{T}\right)\frac{s-t}{T}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Sigma}''\left(\frac{\bar{t}}{T}\right)\left(\frac{s-t}{T}\right)^2,\quad s=1,2,\ldots,T \tag{11}
$$

其中，$\boldsymbol{\Sigma}'$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}''$ 分别是 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的一阶和二阶导数，且有 $\bar{t}=\lambda t+(1-\lambda)s$，$\lambda\in[0,1]$。令：

$$
S_i=\frac{1}{T}\sum\nolimits_{s=1}^{T}k\left(\frac{s-t}{Th}\right)\left(\frac{s-t}{Th}\right)^i\to\begin{cases}\int_{-c}^{1}u^ik(u)\mathrm{d}u,\ t=c\lfloor Th\rfloor(0<c<1)\\ \int_{-1}^{1}u^ik(u)\mathrm{d}u,\lfloor Th\rfloor,,\ t,,\ T-\lfloor Th\rfloor\\ \int_{-1}^{c}u^ik(u)\mathrm{d}u,\ t=T-c\lfloor Th\rfloor(0<c<1)\end{cases} \tag{12}
$$

其中，$i=0,1,2$。基于正文（5）式和泰勒展开，可得：

$$
\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\to hS_0^{-1}S_1\boldsymbol{\Sigma}'\left(\frac{t}{T}\right)+\frac{h^2}{2}S_0^{-1}S_2\boldsymbol{\Sigma}''\left(\frac{t}{T}\right)+S_0^{-1}\frac{1}{T}\sum\nolimits_{s=1}^{T}k\left(\frac{s-t}{Th}\right)\boldsymbol{e}_s \tag{13}
$$

利用 $\int_{-1}^{1}k(u)\mathrm{d}u=1$，$\int_{-1}^{1}uk(u)\mathrm{d}u=0$ 以及 $\frac{1}{\sqrt{Th}}\sum_{s=1}^{T}k\left(\frac{s-t}{Th}\right)\boldsymbol{e}_s=O_p(1)$，可证得：

$$
E\left\|\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_t-\boldsymbol{\Sigma}_t\right\|^2=\begin{cases}O\left(h^2+\frac{1}{Th}\right),\ \frac{t}{T}\in(0,h)\\ O\left(h^4+\frac{1}{Th}\right),\ \frac{t}{T}\in[h,1-h]\\ O\left(h^2+\frac{1}{Th}\right),\ \frac{t}{T}\in(1-h,1)\end{cases} \tag{14}
$$

运用柯西斯瓦兹不等式可证得：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left\|\boldsymbol{B}_1\right\|,,\ \left(\sup_t\mathrm{E}\left\|\boldsymbol{e}_t\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{T}\sum_{s=1}^{T}\left(\mathrm{E}\left\|\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_s-\boldsymbol{\Sigma}_s\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&,,\ \frac{C}{T}\left(\sum\nolimits_{s=1}^{\lfloor Th\rfloor-1}+\sum\nolimits_{s=\lfloor Th\rfloor}^{T-\lfloor Th\rfloor}+\sum\nolimits_{s=T-\lfloor Th\rfloor+1}^{T}\right)\left(\mathrm{E}\left\|\breve{\boldsymbol{\Sigma}}_s-\boldsymbol{\Sigma}_s\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&=O\left(\sqrt{h^4+\frac{1}{Th}}\right)
\end{aligned}
\tag{15}
$$

其中，$\sup_t\mathrm{E}\left\|\boldsymbol{e}_t\right\|^2<\infty$ 来源于假设2(ii)和假设4。因此有 $\boldsymbol{B}_1=O_p\left(\sqrt{h^4+\frac{1}{Th}}\right)$。同理，可证明 $\boldsymbol{B}_2=O_p\left(\sqrt{h^4+\frac{1}{Th}}\right)$ 和 $\boldsymbol{B}_3=O_p\left(h^4+\frac{1}{Th}\right)$。基于以上结果，对于所有 i，都有 $\left\|\breve{\boldsymbol{\gamma}}(i)-\boldsymbol{\gamma}^*(i)\right\|=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{Th}}+h^2\right)$。那么有：

$$\left\|\breve{\boldsymbol{\Omega}}-\boldsymbol{\Omega}^{*}\right\|,\ \sup_{i}\left\|\breve{\boldsymbol{\gamma}}(i)-\boldsymbol{\gamma}^{*}(i)\right\|\sum_{i=-T+1}^{T-1}l\left(\frac{i}{q_T}\right)=O_p\left(\frac{1}{\sqrt{Th}}+h^2\right)\sum_{i=-T+1}^{T-1}l\left(\frac{i}{q_T}\right)$$
$$=O_p\left(\frac{q_T}{\sqrt{Th}}+q_Th^2\right). \tag{16}$$

最后，根据引理3可知 $\boldsymbol{\Omega}^{*}=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$。在假设6下可得 $\breve{\boldsymbol{\Omega}}=\boldsymbol{\Omega}+o_p(1)$，证毕。

定理 1 的证明：在 H_0 下，由引理 1 可知 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}\xrightarrow{d}\underline{\mathbf{BM}}_{\Sigma}(r)$，其中，$\underline{\mathbf{BM}}_{\Sigma}(r)=\mathbf{BM}_{\Sigma}(r)-r\mathbf{BM}_{\Sigma}(1)$，$\mathbf{BM}_{\Sigma}(r)=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\int_0^r\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right)\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\mathbf{BM}(s)$，$\mathbf{BM}(\cdot)$ 为标准多元布朗运动。因为 $\boldsymbol{\Omega}=\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left\{\int_0^1\left[\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\otimes\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\right]\boldsymbol{\Lambda}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\boldsymbol{D}_d\otimes\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}$。结合引理 1、引理 2 和引理 3(i)，在原假设下有：

$$\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)\\
&\xrightarrow{d}\left\{\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\otimes\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_d\right)\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{BM}(r)-r\mathbf{BM}(1)\right]\right\}^{\mathrm{T}}\\
&\left\{\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left[\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\otimes\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_d\right)\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\otimes\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_d\right]\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\right\}^{-1}\\
&\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}_d\right)^{-1}\left(\boldsymbol{D}_d^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\otimes\bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{\frac{1}{2}}\boldsymbol{D}_d\right)\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\left[\mathbf{BM}(r)-r\mathbf{BM}(1)\right]\\
&\xrightarrow{d}\left[\mathbf{BM}(r)-r\mathbf{BM}(1)\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{BM}(r)-r\mathbf{BM}(1)\right]=\left\|\underline{\mathbf{BM}}(r)\right\|^2
\end{aligned} \tag{17}$$

证毕。

定理2的证明：结合引理2和引理3(ii)，在 H_A 下可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=q_T^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)$，其中，$\boldsymbol{\Phi}=\int_0^1\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\left\{\mathrm{vech}\left[\boldsymbol{\Sigma}(s)-\int_0^1\boldsymbol{\Sigma}(r)\mathrm{d}r\right]\right\}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s$ 为正定、对称有限的矩阵，故 $\boldsymbol{\Phi}^{-1}=O_p(1)$。由引理1可知，在备择假设下，$\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=O_p\left(\sqrt{T}\right)$。因此有 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=O_p(T)$，进而有 $\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}=O_p\left(q_T^{-1}T\right)$，证毕。

定理3的证明：结合引理2和引理4，可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_M=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)$。在 H_0 下，从定理1的证明中立刻可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_M\xrightarrow{d}\left\|\underline{\mathbf{BM}}(r)\right\|^2$，证毕。

定理4的证明：由引理2和引理4可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_M=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)$。在 H_A 下，由引理1立刻可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_M=O_p(T)$，证毕。

定理5的证明：由引理2和引理4可得 $\hat{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\breve{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{S}}_M=\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}+o_p(1)$。

（i）在 H_{LA}^1 下：$\boldsymbol{\Sigma}(\tau)=\bar{\boldsymbol{\Sigma}}+b_T\boldsymbol{\Delta}(\tau)$，当 $b_T=T^{-1/2}$ 时，引理 1 可改写为 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr\rfloor}\xrightarrow{d}\boldsymbol{\Omega}^{1/2}\underline{\mathbf{BM}}(r)+\mathrm{vech}\left[\int_0^r\boldsymbol{\Delta}(s)\mathrm{d}s-r\int_0^1\boldsymbol{\Delta}(s)\mathrm{d}s\right]$，那么有

$$\tilde{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_M \xrightarrow{d} \left\| \underline{\mathbf{BM}}(r) + \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\mathrm{vech}\left[\int_0^r \boldsymbol{\Delta}(s)\mathrm{d}s - r\int_0^1 \boldsymbol{\Delta}(s)\mathrm{d}s\right]\right\|^2 。$$

（ii）在 H_{LA}^2 下：$\boldsymbol{\Sigma}^{(i,j)}(\tau) = \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{(i,j)} + d_T\boldsymbol{\Pi}^{(i,j)}\left(\dfrac{\tau-\tau_0^{(i,j)}}{r_T}\right)$，其中 $i,j=1,\ldots,d$ 。当 $d_T \to 0$ 、$r_T \to 0$ 和 $d_T r_T = T^{-1/2}$ 时，引理1可改写 $\tilde{\boldsymbol{S}}_{\lfloor Tr \rfloor} \xrightarrow{d} \boldsymbol{\Omega}^{1/2}\underline{\mathbf{BM}}(r) + \mathrm{vech}\left[\int_{-\infty}^{\frac{r-\tau_0}{r_T}} \boldsymbol{\Pi}(s)\mathrm{d}s - r\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}(s)\mathrm{d}s\right]$，其中，$\int_{-\infty}^{\frac{r-\tau_0}{r_T}} \boldsymbol{\Pi}(s)\mathrm{d}s$ 为矩阵，其第 i 个行和第 j 列元素为 $\int_{-\infty}^{\frac{r-\tau_0^{(i,j)}}{r_T}} \boldsymbol{\Pi}^{(i,j)}(s)\mathrm{d}s$ 。那么有 $\tilde{\boldsymbol{S}}_M^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\tilde{\boldsymbol{S}}_M \xrightarrow{d} \left\| \underline{\mathbf{BM}}(r) + \boldsymbol{\Omega}^{-1/2}\mathrm{vech}\left[\int_{-\infty}^{\frac{r-\tau_0}{r_T}} \boldsymbol{\Pi}(s)\mathrm{d}s - r\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\Pi}(s)\mathrm{d}s\right]\right\|^2$，证毕。

参考文献：

[1]Cavaliere G. Unit Root Tests under Time-varying Variances[J]. Econometric Reviews, 2005, 23: 259-292.

[2]HansenBE. Convergence to Stochastic Integrals for Dependent Heterogeneous Processes[J]. Econometric Theory, 1992, 8(4): 489-500.

[3]Jansson M. Consistent Covariance Matrix Estimation for Linear Processes[J]. Econometric Theory, 2002, 18(6): 1449-1459.

[4]Patilea V, Raïssi H. Adaptive Estimation of Vector Autoregressive Models with Time-varying Variance: Application to Testing Linear Causality in Mean[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2012, 142(11): 2891-2912.

附表 1　　备择假设 DGPP.1 在 5%显著性水平下各统计量的检验功效

数据生成类型	误差分布	T	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
Ⅰ	MN	250	0.360	0.750	0.899	0.896	0.979	0.973
		500	0.967	0.988	1.000	1.000	1.000	1.000
		750	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MT_5	250	0.203	0.355	0.402	0.475	0.642	0.673
		500	0.606	0.720	0.791	0.801	0.876	0.873
		750	0.833	0.875	0.947	0.942	0.971	0.965
		1000	0.910	0.926	0.985	0.978	0.991	0.984
	SMT_5	250	0.186	0.331	0.336	0.419	0.566	0.604
		500	0.535	0.627	0.730	0.752	0.841	0.855
		750	0.757	0.812	0.913	0.901	0.937	0.943
		1000	0.867	0.893	0.962	0.959	0.971	0.971
Ⅱ	MN	250	0.350	0.741	0.888	0.880	0.973	0.970
		500	0.966	0.988	1.000	1.000	1.000	1.000
		750	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
		1000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	MT_5	250	0.210	0.361	0.396	0.471	0.653	0.671
		500	0.606	0.710	0.796	0.799	0.879	0.872
		750	0.841	0.875	0.950	0.944	0.970	0.966
		1000	0.913	0.933	0.986	0.979	0.991	0.987
	SMT_5	250	0.201	0.337	0.322	0.419	0.554	0.593
		500	0.543	0.648	0.739	0.751	0.839	0.862
		750	0.759	0.804	0.912	0.906	0.939	0.944
		1000	0.869	0.897	0.963	0.961	0.971	0.973

附表 2　　备择假设 DGPP.2 在 5%显著性水平下各统计量的检验功效

数据生成类型	误差分布	T	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
I	MN	250	0.175	0.349	0.291	0.236	0.682	0.552
		500	0.689	0.828	0.875	0.668	0.975	0.891
		750	0.976	0.986	0.996	0.929	0.998	0.990
		1000	0.999	0.998	1.000	0.992	1.000	0.999
	MT_5	250	0.080	0.125	0.064	0.086	0.209	0.215
		500	0.288	0.377	0.297	0.238	0.493	0.413
		750	0.522	0.597	0.547	0.391	0.702	0.577
		1000	0.700	0.749	0.746	0.590	0.831	0.716
	SMT_5	250	0.069	0.149	0.053	0.075	0.202	0.195
		500	0.251	0.337	0.220	0.194	0.407	0.344
		750	0.469	0.538	0.457	0.355	0.608	0.486
		1000	0.648	0.690	0.639	0.492	0.742	0.635
II	MN	250	0.192	0.376	0.283	0.233	0.638	0.522
		500	0.692	0.838	0.880	0.663	0.976	0.887
		750	0.972	0.986	0.996	0.925	0.999	0.989
		1000	0.998	0.999	1.000	0.994	1.000	0.999
	MT_5	250	0.077	0.134	0.064	0.093	0.218	0.220
		500	0.291	0.389	0.299	0.242	0.501	0.408
		750	0.531	0.596	0.549	0.385	0.699	0.574
		1000	0.697	0.750	0.744	0.592	0.840	0.724
	SMT_5	250	0.075	0.148	0.056	0.077	0.190	0.200
		500	0.243	0.337	0.221	0.195	0.408	0.350
		750	0.473	0.539	0.456	0.359	0.610	0.489
		1000	0.647	0.693	0.639	0.494	0.746	0.637

附表 3　　备择假设 DGPP.3 在 5%显著性水平下各统计量的检验功效

数据生成类型	误差分布	T	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
I	MN	250	0.322	0.534	0.433	0.636	0.695	0.786
		500	0.813	0.887	0.897	0.963	0.961	0.981
		750	0.983	0.989	0.990	0.998	0.998	1.000
		1000	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
	MT_5	250	0.133	0.230	0.131	0.272	0.322	0.434
		500	0.344	0.428	0.403	0.539	0.563	0.632
		750	0.536	0.576	0.607	0.750	0.720	0.808
		1000	0.679	0.709	0.754	0.853	0.827	0.885
	SMT_5	250	0.130	0.227	0.116	0.234	0.302	0.376
		500	0.308	0.374	0.326	0.482	0.473	0.578
		750	0.489	0.527	0.517	0.654	0.635	0.721
		1000	0.586	0.623	0.664	0.780	0.760	0.832
II	MN	250	0.309	0.513	0.410	0.611	0.677	0.773
		500	0.817	0.875	0.892	0.963	0.957	0.981
		750	0.981	0.990	0.987	0.997	0.997	0.999
		1000	0.997	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
	MT_5	250	0.142	0.241	0.131	0.262	0.320	0.422
		500	0.340	0.420	0.410	0.543	0.547	0.622
		750	0.526	0.574	0.602	0.747	0.727	0.805
		1000	0.674	0.723	0.754	0.847	0.824	0.886
	SMT_5	250	0.118	0.223	0.114	0.223	0.298	0.367
		500	0.315	0.384	0.329	0.481	0.479	0.577
		750	0.488	0.524	0.514	0.656	0.636	0.714
		1000	0.588	0.627	0.666	0.774	0.764	0.829

附表 4　　备择假设 DGPP.4 在 5%显著性水平下各统计量的检验功效

数据生成类型	误差分布	T	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
Ⅰ	MN	250	0.285	0.490	0.439	0.508	0.743	0.737
		500	0.847	0.927	0.931	0.933	0.977	0.971
		750	0.985	0.990	0.996	0.995	0.999	0.999
		1000	0.998	0.997	1.000	0.998	1.000	1.000
	MT_5	250	0.128	0.200	0.129	0.179	0.312	0.340
		500	0.353	0.436	0.390	0.431	0.560	0.561
		750	0.582	0.637	0.653	0.652	0.761	0.760
		1000	0.712	0.761	0.794	0.785	0.854	0.859
	SMT_5	250	0.098	0.176	0.100	0.159	0.279	0.317
		500	0.310	0.378	0.343	0.381	0.484	0.515
		750	0.467	0.528	0.543	0.556	0.665	0.677
		1000	0.621	0.669	0.672	0.689	0.766	0.774
Ⅱ	MN	250	0.292	0.490	0.415	0.493	0.727	0.726
		500	0.834	0.914	0.930	0.926	0.973	0.971
		750	0.986	0.991	0.996	0.993	0.999	0.999
		1000	0.998	0.999	1.000	0.999	1.000	1.000
	MT_5	250	0.125	0.199	0.120	0.175	0.311	0.345
		500	0.341	0.438	0.388	0.433	0.558	0.561
		750	0.583	0.639	0.653	0.653	0.764	0.760
		1000	0.716	0.773	0.796	0.787	0.856	0.865
	SMT_5	250	0.104	0.183	0.096	0.157	0.283	0.311
		500	0.309	0.386	0.343	0.381	0.483	0.524
		750	0.463	0.534	0.543	0.554	0.665	0.674
		1000	0.616	0.668	0.673	0.700	0.772	0.777

附表 5　　基于上证指数和恒生指数对数收益率残差序列的检验结果

统计量	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
T=235	0.312	0.244	2.657*	1.118**	3.862***	1.573***

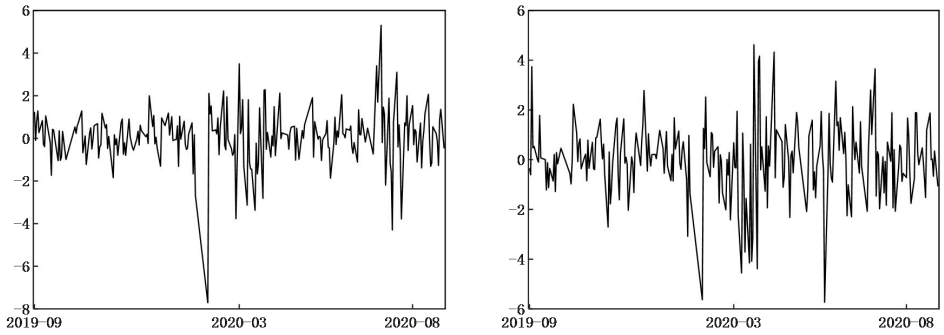
注：*，**和***分别表示在 10%，5%和 1%的显著性水平下显著。下同。

附表 6　　基于 WTI 和美元指数收益率残差序列的检验结果

统计量	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
T=248	0.712	0.113	2.623*	0.677	6.934***	1.695***

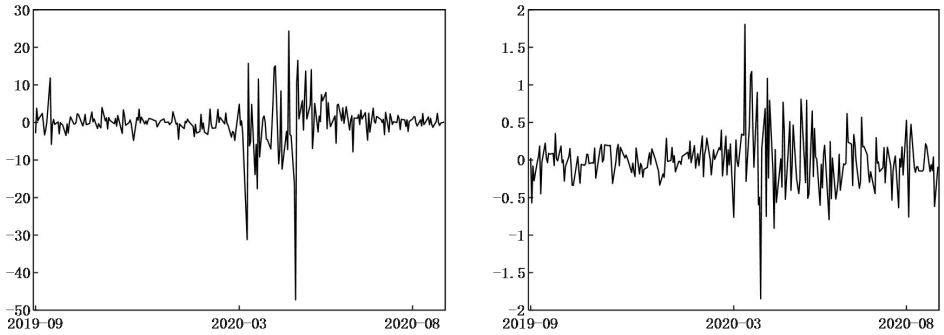
附表 7　　基于美国和日本 EPU 残差序列的检验结果

统计量	D	D_b	MS_T	MQ_T	MS_T^*	MQ_T^*
残差（T=359）	0.626	0.153	2.783*	1.125**	4.046***	1.583***



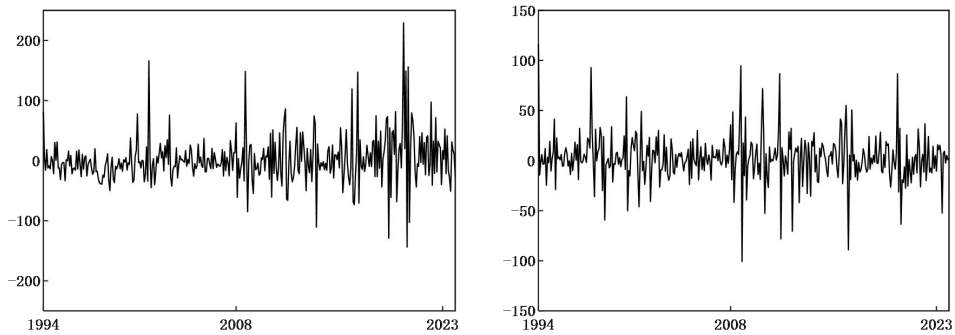
（a）上证指数对数收益率残差　　（b）恒生指数对数收益率残差

附图 1　上证指数和恒生指数的对数收益率残差序列



（a）WTI对数收益率残差　　（b）美元指数对数收益率残差

附图 2　WTI 和美元指数对数收益率残差序列



（a）美国EPU指数残差　　（b）日本EPU指数残差

附图 3　美国和日本 EPU 指数残差序列