

附录 1：三系统估计量偏倚估计公式证明

简单随机抽样下，刀切法下事后层 v 的三系统估计量 TSE_v 的偏倚估计公式为：

$$Bias\left(TSE_v\right)=\left(n-1\right)\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right) \quad (\text{附 } 1)$$

式（附 1）中， $TSE_{v(\bullet)}=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TSE_{v(i)}$ 为所有复制估计量的平均值， $TSE_{v(i)}$ 是基于剔除第 i 个样本普查小区后的刀切复制估计量。

估计量 TSE_v 的数学期望展开式为：

$$E\left(TSE_v\right)=TSE_v+\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots \quad (\text{附 } 2)$$

则 TSE_v 的偏倚为：

$$Bias\left(TSE_v\right)=E\left(TSE_v\right)-TSE_v=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2}{n^2}+\cdots \quad (\text{附 } 3)$$

刀切复制估计量 $TSE_{v(i)}$ 的数学期望展开式为：

$$E\left(TSE_{v(i)}\right)=TSE_v+\frac{a_1}{n-1}+\frac{a_2}{(n-1)^2}+\cdots \quad (\text{附 } 4)$$

式（4）展开式对所有 i 均成立，此时

$$E\left(TSE_{v(\bullet)}\right)=E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n TSE_{v(i)}\right)=\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E\left(TSE_{v(i)}\right)=TSE_v+\frac{a_1}{n-1}+\frac{a_2}{(n-1)^2}+\cdots \quad (\text{附 } 5)$$

计算估计量 TSE_v 与刀切复制估计量均值 $TSE_{v(\bullet)}$ 之差的数学期望：

$$E\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right)=E\left(TSE_{v(\bullet)}\right)-E\left(TSE_v\right)=\frac{a_1}{n(n-1)}+\frac{a_2(2n-1)}{(n-1)^2 n^2}+\cdots \quad (\text{附 } 6)$$

将式（附 6）左右两边乘以 $(n-1)$ 得到：

$$E(n-1)\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right)=(n-1)E\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right)=\frac{a_1}{n}+\frac{a_2(2n-1)}{(n-1)n^2}+O\left(n^{-3}\right) \quad (\text{附 } 7)$$

比较式（附 3）和式（附 7），可得：

$$E(n-1)\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right) \approx Bias\left(TSE_v\right) \quad (\text{附 } 8)$$

当 n 较大时， $(n-1)\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right)$ 是 $Bias\left(TSE_v\right)$ 的相合估计量，故刀切法下的偏倚估计公式为：

$$Bias\left(TSE_v\right)=(n-1)\left(TSE_{v(\bullet)}-TSE_v\right)，\text{同式（附 } 1\text{）。}$$

经偏倚校正的刀切估计量 $TSE_{v(jack)}$ 为：

$$TSE_{v(jack)} = TSE_v - Bias\left(TSE_v\right) = nTSE_v - (n-1)TSE_{v(\bullet)} \quad (\text{附 9})$$

计算 $TSE_{v(jack)}$ 的期望：

$$E\left(TSE_{v(jack)}\right) = nE\left(TSE_v\right) - (n-1)E\left(TSE_{v(\bullet)}\right) = \theta - \frac{a_2}{n(n-1)} + \cdots = \theta + O\left(n^{-2}\right) \quad (\text{附 10})$$

则 $TSE_{v(jack)}$ 的偏倚为：

$$Bias\left(TSE_{v(jack)}\right) = O\left(n^{-2}\right) \quad (\text{附 11})$$

比较式（附 3）和式（附 11），经偏倚校正的刀切估计量 $TSE_{v(jack)}$ ，将偏倚从 $O\left(n^{-1}\right)$ 降为 $O\left(n^{-2}\right)$ ，表明采用刀切法构造的刀切估计量 $TSE_{v(jack)}$ 可有效减少偏倚。

同理，分层抽样和分层二重抽样下，刀切法下事后层 v 的三系统估计量 TSE_v 的偏倚估计公式为：

$$Bias\left(TSE_v\right) = \sum_{h=1}^H (n_h - 1) \left(TSE_{v(\bullet)h} - TSE_v \right) \quad (\text{附 12})$$

经偏倚校正的刀切估计量 $TSE_{v(jack)}$ 为：

$$TSE_{v(jack)} = \sum_{h=1}^H \left(n_h TSE_v - (n_h - 1) TSE_{v(\bullet)h} \right) \quad (\text{附 13})$$

式（附 12）和式（附 13）中， $TSE_{v(\bullet)h} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} TSE_{v(hi)}$ ，分层抽样下，

$TSE_{v(\bullet)h} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} TSE_{v(hi)}$ 为每个 h 层所有复制估计量的平均值， $TSE_{v(hi)}$ 是基于剔除第 h 层

的第 i 个样本普查小区后的刀切复制估计量。分层二重抽样下， $TSE_{v(\bullet)h} = \frac{1}{n_h} \sum_{i=1}^{n_h} TSE_{v(hi)}$ 为

第一重抽样的每个 h 层所有复制估计量的平均值， $TSE_{v(hi)}$ 是基于剔除第一重样本的第 h 层第 i 个样本普查小区后的刀切复制估计量。

附表 1

0~14 岁男性女性人口层 (v=1) 未加权人数

	第二重样本小区													
$x_{ijk,1}$	1	2	3	9	10	15	16	17	22	23	24	25	28	29
$x_{111,1n}$	15	17	16	16	16	15	17	16	17	18	17	18	17	18
$x_{101,1n}$	8	5	6	5	8	9	8	7	6	7	8	6	7	7
$x_{110,1n}$	7	9	7	9	6	8	7	8	8	6	6	8	5	6
$x_{100,1n}$	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
$x_{011,1n}$	6	6	7	7	7	6	6	6	7	6	7	5	6	6
$x_{001,1n}$	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	1
$x_{010,1n}$	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
$x_{101,1o}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0
$x_{100,1o}$	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0
$x_{001,1o}$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$x_{110,1i}$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0
$x_{100,1i}$	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
$x_{010,1i}$	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0

附表 2

15~59 岁男性人口层 (v=2) 未加权人数

	第二重样本小区													
$x_{ijk,2}$	1	2	3	9	10	15	16	17	22	23	24	25	28	29
$x_{111,2n}$	41	43	40	42	42	42	40	41	42	42	40	42	41	42
$x_{101,2n}$	10	11	12	11	12	10	12	11	9	10	10	12	10	10
$x_{110,2n}$	11	10	9	11	9	11	10	9	12	10	11	9	10	9
$x_{100,2n}$	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1
$x_{011,2n}$	10	9	11	10	10	11	10	11	9	11	12	9	10	12
$x_{001,2n}$	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1
$x_{010,2n}$	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
$x_{101,2o}$	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	0	1
$x_{100,2o}$	1	2	1	1	1	0	1	1	2	1	0	2	2	1
$x_{001,2o}$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1
$x_{110,2i}$	2	1	1	1	1	2	1	1	2	1	2	1	0	1
$x_{100,2i}$	1	2	1	1	1	0	1	1	2	1	0	2	2	1
$x_{010,2i}$	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	1	2

附表 3

15~59 岁女性人口层 ($v=3$) 未加权人数

	第二重样本小区													
$x_{ijk,3}$	1	2	3	9	10	15	16	17	22	23	24	25	28	29
$x_{111,3n}$	38	38	39	38	39	38	37	38	39	40	38	40	38	39
$x_{101,3n}$	10	11	12	11	10	9	12	11	11	9	10	9	10	12
$x_{110,3n}$	12	10	10	11	10	12	12	10	9	11	12	11	11	10
$x_{100,3n}$	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1
$x_{011,3n}$	11	12	11	12	11	12	10	11	11	11	10	11	12	11
$x_{001,3n}$	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
$x_{010,3n}$	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0
$x_{101,3o}$	2	1	1	2	1	2	1	1	0	1	1	1	2	1
$x_{100,3o}$	0	1	1	0	0	1	1	1	2	1	1	2	1	1
$x_{001,3o}$	1	1	1	1	2	0	1	1	1	1	1	0	0	1
$x_{110,3i}$	2	1	1	2	1	2	1	1	1	1	2	0	2	1
$x_{100,3i}$	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1
$x_{010,3i}$	1	1	2	0	2	1	1	2	1	2	1	2	1	1

附表 4

60 岁及以上男性人口层 ($v=4$) 未加权人数

	第二重样本小区													
$x_{ijk,4}$	1	2	3	9	10	15	16	17	22	23	24	25	28	29
$x_{111,4n}$	8	9	9	9	8	9	9	8	9	9	8	8	9	9
$x_{101,4n}$	5	6	5	6	5	7	6	5	5	6	6	7	5	6
$x_{110,4n}$	6	5	4	5	4	5	5	6	6	5	5	5	5	6
$x_{100,4n}$	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0
$x_{011,4n}$	5	5	6	6	6	5	6	6	6	5	6	5	5	5
$x_{001,4n}$	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
$x_{010,4n}$	0	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0
$x_{101,4o}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0
$x_{100,4o}$	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0
$x_{001,4o}$	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$x_{110,4i}$	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
$x_{100,4i}$	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
$x_{010,4i}$	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0

附表 5 60 岁及以上女性人口层（ $v=5$ ）未加权人数

	第二重样本小区													
$x_{ijk,5}$	1	2	3	9	10	15	16	17	22	23	24	25	28	29
$x_{111,5n}$	9	8	8	8	9	10	8	10	10	9	8	10	9	9
$x_{101,5n}$	5	6	6	7	5	4	5	4	5	6	5	4	4	5
$x_{110,5n}$	6	5	5	4	5	6	6	5	4	5	4	6	5	6
$x_{100,5n}$	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
$x_{011,5n}$	5	5	6	5	4	5	5	5	6	6	6	5	6	4
$x_{001,5n}$	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	1	0	0
$x_{010,5n}$	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1
$x_{101,5o}$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0
$x_{100,5o}$	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0
$x_{001,5o}$	0	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	1
$x_{110,5i}$	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
$x_{100,5i}$	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0
$x_{010,5i}$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1