附录 1

定理 1 证明：

$$\sum_{j=1}^{d} w_j \frac{\mathbf{E}[x_j \mid x_j < z_j]}{z_j} - \sum_{j=1}^{d} w_j \frac{\mathbf{E}[y_j \mid y_j < z_j]}{z_j} = w_j \left[\frac{x_{i1j} - \frac{z_j \varepsilon}{w_j}}{z_j} \right] - w_j \left[\frac{x_{i1j}}{z_j} \right] + w_k \left[\frac{x_{i2k} + \frac{z_k \varepsilon}{w_k}}{z_k} \right] - w_k \left[\frac{x_{i2k}}{z_k} \right] = 0$$

定理 2 证明：

因为 $T_A \in [0,1]$，所以规范性是显然的。可加性的证明，设 $A, B \subset \Omega$ 且 A 与 B 互不相容，则

$$T_{A\cup B} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d} w_j \sum_{i\in A\cup B, xij<zj} [\frac{z_j - x_{ij}}{z_j}]^{\theta} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d} w_j [\sum_{i\in A, xij<zj} [\frac{z_j - x_{ij}}{z_j}]^{\theta} + \sum_{i\in B, xij<zj} [\frac{z_j - x_{ij}}{z_j}]^{\theta}] = T_A + T_B$$

分量指数的性质讨论如下：

定理 3 证明：

定理的条件中已固定的后富广度，即 $g\left(x_j\right) = g\left(y_j\right)$，应用正文中的式（3），可以得到，$\mathbf{E}\bar{\mu}_{xj} < \mathbf{E}\bar{\mu}_{yj}$。定理 3 说明，$\mathbf{E}\mu_{\mathrm{j}}$ 是后富个体第 j 个分量深度的增函数。

定理 4 证明：

$$\mathbf{E}\mu_j = \frac{1}{N}\sum_{xij<zj} [\frac{z_j - x_{ij}}{z_j}]^{\theta} = \frac{\mathrm{N_j}}{N}\frac{1}{N_J}\sum_{xij<zj} [\frac{z_j - x_{ij}}{z_j}]^{\theta} < g(x_j)\frac{1}{N_J}\sum_{xij<zj} [\frac{z_j}{z_j}]^{\theta} = g(x_j)\frac{1}{N_J} N_j = g(x_j)$$

定理 3 和定理 4 的结论说明，随着后富状况的改善，后富个体的后富指标值与阈值的偏差减少，因而后富指数减小，反之，后富指数值增大。第 j 个分量指数值在区间 $[0, g(x_j)]$ 上变化。

等价值动态多维共同富裕指数公理适应性证明：

后富公理和共同富裕公理是两个相互联系且具有内在逻辑一致性的概念。后富公理和共同富裕公理在目标上是互补的。后富指数 T_0 与共同富裕指数 T_1 之间的关系可表达为 $T_1 = 1 - T_0$，即一个指数的增加会导致另一个指数的减少。在后富指数的公理证明中，有一系列的不等式，这些不等式构成了公理的数学基础。例如，如果存在一个不等式 x👶T_0，其表示后富指数的特定条件下的特性。为了将后富指数的公理应用于共同富裕指数，则需要不等式转换，对于每一个不等式 x👶T_0 将转换为 x👽T_1。换言之，根据 $T_1 = 1 - T_0$ 的关系，可以根据后富指数的结论推导出共同富裕指数的相应结论。如果后富指数的公理证明了 x👶T_0，那么共同富裕指数的公理将证明 x👽T_1。通过上述结论，可以证明后富指数的公理性标准同样适用于共同富裕指数。具体来说，对于后富指数的任意公理 $P(T_0)$，如果 $P(T_0)$ 成立，那么 $P(1 - T_1)$ 也成立。

公理①相关性（或焦点性）公理：设 $T\left(y\right)$ 为定义在 $\left[0, +\infty\right]$ 上的函数，若 $T\left(y\right)$ 的一阶

和二阶导数都存在，则 $\mathbf{E}T(Y)$ 为满足后富公理的指数的充分必要条件是：$T(y)$ 为区间 $[0,1]$ 上的严格单调递减函数，且满足当 $y \geq 1$ 时，$T(y)=0$；$dT(y)/dy$ 为单调不减函数；$d^2T(y)/d^2y$ 为单调不增函数。相关性公理的充分性证明：

$\mathbf{E}T(Y)=\sum_{i=1}^{N}1/NT(y_i)=1/N\sum_{i=1}^{N}T(x_i/z_0)=1/N\sum_{x_i \leq z_0}T(x_i/z_0)=1/N\sum_{y_i \leq 1}T(y_i)$ 因此，$\mathbf{E}T(Y)$ 只与后富个体有关，与 Ω 上取值大于 z_0 的非后富个体无关。

公理②弱点调性公理的证明：由 $T=1/N\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{,xij<zj}[(z_j-x_{ij})/z_j]^{\theta}$ 知，对于任何 $\beta>0$ 和任一指标变量 x_{j0}，$[(z_{j0}-(x_{ij0}-\beta))/z_{j0}]^{\theta}>[(z_{j0}-x_{ij0})/z_{j0}]^{\theta}$，在 T 关系式中，将 $[(z_{j0}-x_{ij0})/z_{j0}]^{\theta}$ 从替换成 $[(z_{j0}-(x_{ij0}-\beta))/z_{j0}]^{\theta}$，则指数值变大。

公理③强单调公理：由 $T=1/N\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{,xij<zj}[(z_j-x_{ij})/z_j]^{\theta}$ 知，对于任何 $\beta>0$ 和任一指标变量 x_j，当第 i 个后富个体指标值增加 β 时有：

$$\begin{cases}[\dfrac{z_j-x_{ij}-\beta}{z_j}]^{\theta} & x_{ij}+\beta<z_j \\ 0 & x_{ij}+\beta \geq z_j\end{cases} < \begin{cases}[\dfrac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta} & x_{ij}<z_j \\ 0 & x_{ij} \geq z_j\end{cases}$$

则在 T 的关系式中，将 $[(z_{j0}-x_{ij0})/z_{j0}]^{\theta}$ 替换成 $[(z_{j0}-x_{ij0}-\beta)/z_{j0}]^{\theta}$，指数值变小。

公理④弱转移性公理：设第 i_1 个严重后富的个体在指标 j 上向第 i_2 个一般后富的个体在指标 k 上等价值的转移值为 $z_j\varepsilon/w_j$ 与 $z_k\varepsilon/w_k$，即原有的指标值变化成 $x_{i_1j}-z_j\varepsilon/w_j$ 与 $x_{i_2k}+z_k\varepsilon/w_k$，指数 T 中的和式只有两项发生了变化，用变化后指数减去变化前的指数得到:

$$w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta}+w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}-\frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta}$$

当 $\varepsilon=0$ 时，上式等于零，因此，只需证明其关于 ε 的导数大于零。

事实上，其导数为

$$\theta[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta-1}-\theta[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}-\frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta-1}。$$

又由 $x_{i_1j}/z_j<x_{i_2k}/z_k$，则导数大于零。

公理⑤强转移性公理：接公理④，先考虑临界值的情况，即：$z_k=x_{i_2k}+z_k\varepsilon/w_k$，则对于任何 $\eta>0$，当等价转移值为 $z_j(\varepsilon-\eta)/w_j$ 与 $z_k(\varepsilon-\eta)/w_k$，按照公理④，若 $f_0(\varepsilon-\eta)=w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon-\eta}{w_j}]^{\theta}+w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}-\frac{\varepsilon-\eta}{w_k}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta}>0$ 事实上，由于 $f_0(\varepsilon-\eta)$ 的连续性，所以，

$$f_0(\varepsilon)=w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta} \geq 0$$

对于等价值转移值为 $z_j\varepsilon_1/w_j$，与 $z_k\varepsilon_1/w_k>z_k\varepsilon/w_k$，自然有

$$w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon_1}{w_j}]^{\theta}>w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta}$$

从而有：

$$w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon_1}{w_j}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta}>0 \text{。}$$

公理⑥弱转移敏感性公理：设第 i_1 个严重后富的个体在指标 j 上向第 i_2 个严重后富个体在指标 k 上等价值的转移值为 $z_j\varepsilon/w_j$，与 $z_k\varepsilon/w_k$，第 i_3 个一般后富的个体在指标 j 上向第 i_4 个一般后富的个体在指标k上等价值的转移值也为 $z_j\varepsilon/w_j$ 与 $z_k\varepsilon/w_k$。严重后富的群体中，指标等价值转移后，指数形成的差为 $f_1(\varepsilon)=w_j[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta}+w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}-\frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_1j1}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta}$，一般后富的群体中，指标等价值转移后，指数形成的差为：

$$f_2(\varepsilon)=w_j[\frac{z_j-x_{i_3j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta}+w_k[\frac{z_k-x_{i_4k}}{z_k}-\frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta}-w_j[\frac{z_j-x_{i_3j}}{z_j}]^{\theta}-w_k[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}]^{\theta}$$

只需证明 $f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)>0$，对 $\forall\varepsilon>0$ 成立。事实上，$f_1(0)-f_2(0)=0$，$\frac{d}{d\varepsilon}[f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)]=\theta[\frac{z_j-x_{i_1j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta-1}-\theta[\frac{z_k-x_{i_2k}}{z_k}-\frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta-1}-\theta[\frac{z_j-x_{i_3j}}{z_j}+\frac{\varepsilon}{w_j}]^{\theta-1}+\theta[\frac{z_k-x_{i_4k}}{z_k}\ \frac{\varepsilon}{w_k}]^{\theta-1}$，由于严重后富群体和一般后富的群体都是同水平转移，因此有 $\frac{x_{i_1j}}{z_j}<\frac{x_{i_3k}}{z_j}$ 和 $\frac{x_{i_1j}}{z_j}=\frac{x_{i_2k}}{z_k}$ 与 $\frac{x_{i_3j}}{z_j}=\frac{x_{i_4k}}{z_k}$，若令 $\frac{x_{i_1j}}{z_j}=x$，$\frac{x_{i_3j}}{z_j}=y$，则

$$\frac{d}{dx}[(1-x+\frac{\varepsilon}{w_j})^{\theta-1}-(1-x-\frac{\varepsilon}{w_k})^{\theta-1}]=(\theta-1)[(1-x-\frac{\varepsilon}{w_k})^{\theta-2}-(1-x+\frac{\varepsilon}{w_j})^{\theta-2}]<0$$

$(1-x+\frac{\varepsilon}{w_j})^{\theta-1}-(1-x-\frac{\varepsilon}{w_k})^{\theta-1}$是 x 的严格递减函数。因此，$\frac{d}{d\varepsilon}[f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)]>0$，所以，$f_1(\varepsilon)-f_2(\varepsilon)>0$。

公理⑦连续性公理：若$T(y)$的一阶和二阶导数都存在，可导必连续。

公理⑧复制不变性公理：由于 $ET(Y)=1/N\sum_{yi\mathscr{E}I}T(y_i)$ 的值只与分布有关，分布不同指数才有可能不同，指标变量分布相同时，指数值不变。

公理⑨对称性公理：由于 $ET(Y)=1/N\sum_{yi\mathscr{E}I}T(y_i)$ 的值只与分布有关，与后富个体的计算顺序无关，不管顺序如何变化，$\sum_{yi\mathscr{E}I}T(y_i)$ 只对指标值与阈值的比值不超过 1 的后富个体值进行计算

公理⑩人口子群一致性公理：设多维指标向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 任何两个分布 $(x_1,x_2,\cdots,x_d)$ 与 $(y_1,y_2,\cdots,y_d)$，若 $A,B\subset\Omega$ 且 A 与 B 互不相容，满足：

$T_A(x_1,x_2,\cdots,x_d)<T_A(y_1,y_2,\cdots,y_d)$，$T_B(x_1,x_2,\cdots,x_d)=T_B(y_1,y_2,\cdots,y_d)$

则：$T_{A\cup B}(x_1,x_2,\cdots,x_d)<T_{A\cup B}(y_1,y_2,\cdots,y_d)$，

$$T_{A\cup B}(x_1,x_2,\cdots,x_d)=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in A\cup B,xij<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in A,xij<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in B,xij<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}$$

$$=T_A(x_1,x_2,\cdots,x_d)+T_B(x_1,x_2,\cdots,x_d)<T_A(y_1,y_2,\cdots,y_d)+T_B(y_1,y_2,\cdots,y_d)$$

$$=T_{A\cup B}(y_1,y_2,\cdots,y_d)$$

公理⑪可分解公理：将人口集划分为若干个互不相交的子集，则指数等于这些子集上的指数的加权和。事实上，对 Ω 的任何一个完备分划，满足：$\Omega_k\bigcap\Omega_t=\Phi(k\neq t),\bigcup_{k=1}^{n}\Omega_k=\Omega$，由于 $T(\Omega_k)=\frac{1}{N_{\Omega_k}}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in\Omega_k,xij<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}$ $N_{\Omega k}$ 为 Ω_k 中元素的个数，Ω_k 的权重为 $\frac{N_{\Omega k}}{N}$，因此，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{N_{\Omega k}}{N}T(\Omega_k)=\sum_{k=1}^{n}\frac{N_{\Omega k}}{N}\frac{1}{N_{\Omega_k}}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in\Omega_k,x_{ij}<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in\Omega_k,x_{ij}<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in\bigcup_{k}^{n}\Omega_k,xij<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{d}w_j\sum_{i\in\Omega,x_{ij}<z_j}[\frac{z_j-x_{ij}}{z_j}]^{\theta}=T$$

公理⑫贫困线上升公理：设对于第 j 个分量指数和任何的两个阈值 z_{j1} 和 z_{j2}，当 $z_{j1}<z_{j2}$ 时，首先，$\frac{x-c}{x}$（其中 c 为常数）是变量 x 的单调递增函数，$\frac{z_{j2}-x_{ij}}{z_{j2}}>0$。根据 μ_j 的定义，当 $x_{ij}\geq z_{j2}$ 时，μ_{j1} 与 μ_{j2} 都为零；当 $x_{ij}<z_{j1}$ 时，由于 $\frac{x-c}{x}$ 的递增性有，$\mu_{j1}=[\frac{z_{j1}-x_{ij}}{z_{j1}}]^{\theta}<[\frac{z_{j2}-x_{ij}}{z_{j2}}]^{\theta}=\mu_{j2}$；当 $z_{j1}\leq x_{ij}<z_{j2}$，$\mu_{j1}=0,\mu_{j2}=\frac{z_{j2}-x_{ij2}}{z_{j2}}>0$，因此，对 x_j 的一切取值，都有，$\mu_{j1}\leq\mu_{j2}$，从而，$\mathbf{E}\mu_{j1}\leq\mathbf{E}\mu_{j2}$，再由于 $\mathbf{P}(\mu_{j1}<\mu_{j2})>0$，所以，$\mathbf{E}\mu_{j1}<\mathbf{E}\mu_{j2}$，因此，该两个阈值对应的综合指数相比，后者就会提高。

通过以上证明可知，等价值动态多维共同富裕综合（EDMCPI）指数完全符合共同公理的条件要求。因此，该指数完全反映了共同富裕程度变化的内在规律。从以上证明不难看出，多维共同富裕分项指数也满足共同公理，具有分指标考察多维共同富裕程度变化的功能。因此，多维共同富裕综合指数和分项指数一起构成了区域多维共同富裕测量方法体系。

附表 1：

附表 1 各地区各维度对后富指数贡献率 （%）

年份	地区	收入	生活水平	住房	健康	教育	主观态度
2014	华北	20.6	55.37	6.15	3.87	10.37	3.64
	东北	19.77	53.13	4.87	4.20	12.26	5.77
	华东	20.20	48.20	4.07	3.94	18.41	5.18
	中南	22.47	48.35	5.24	3.74	14.92	5.28
	西南	23.28	43.90	6.68	2.90	20.64	2.60
	西北	20.13	50.75	7.28	3.93	15.90	2.01
2016	华北	15.38	55.74	6.02	4.02	14.93	3.92

	东北	11.02	51.32	3.98	5.29	19.24	9.16
	华东	13.94	49.07	4.22	5.63	22.11	5.03
	中南	15.61	50.16	5.54	5.32	18.43	4.95
	西南	16.39	47.88	6.62	3.97	22.18	2.97
	西北	15.27	52.11	6.87	5.18	16.64	3.93
2018	华北	17.48	67.42	7.32	0.79	4.07	2.92
	东北	11.65	72.77	5.47	0.88	4.93	4.30
	华东	12.66	63.13	4.96	1.09	10.18	7.97
	中南	14.47	63.25	6.25	0.99	9.10	5.94
	西南	14.54	57.59	7.32	0.67	16.90	2.97
	西北	12.65	62.99	6.97	1.12	13.18	3.09
2020	华北	17.66	49.58	7.01	2.70	19.48	3.56
	东北	16.18	49.15	5.77	3.64	20.38	4.88
	华东	16.56	48.20	6.64	3.53	20.72	4.34
	中南	16.56	46.34	4.97	6.86	19.62	5.66
	西南	17.13	45.78	6.69	7.90	19.63	2.88
	西北	16.91	42.83	6.97	9.18	20.00	4.11